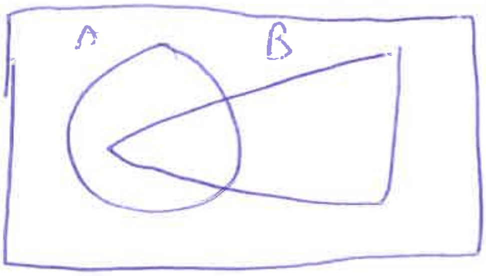
Föreläsning 1

1) Presentation av kursen m.h.a OH-bilder

Förkunskaper matriser Bloms kurs matte konvergenskriterier, serier

2) Repetition av betingad sth
och lagen om tot sth

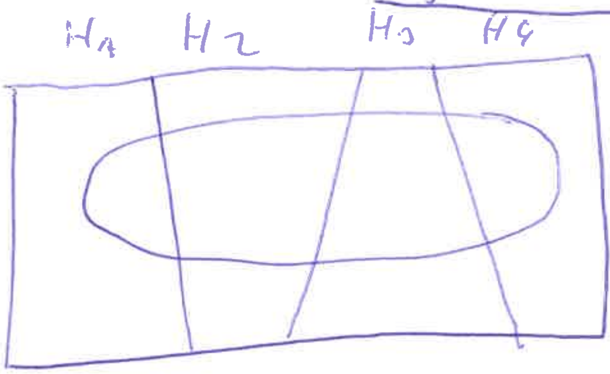


Betingnings formeln

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Lagen om tot sth



$$P(A) = \sum_i P(A \cap H_i) = \sum_i P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

Stokastisk process

Def En familj av stokastiska variabler $\{X(t), t \in T\}$

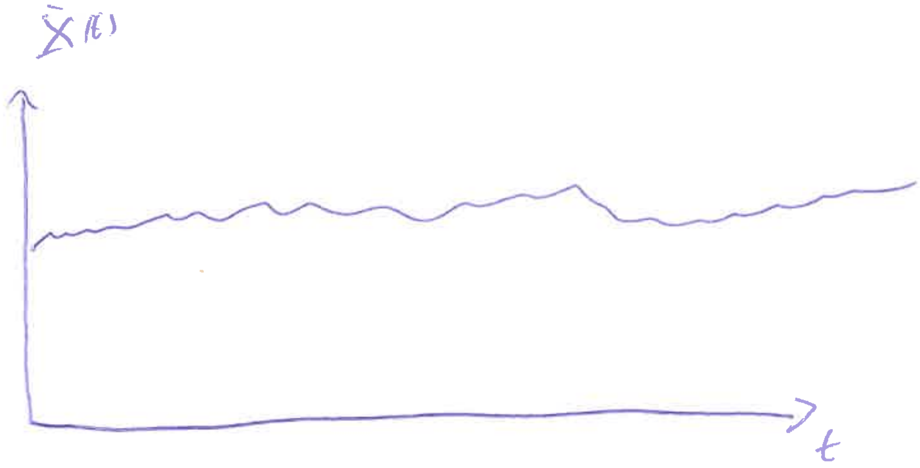
kallas en stokastisk process

Mängden T kallas parameterrummet

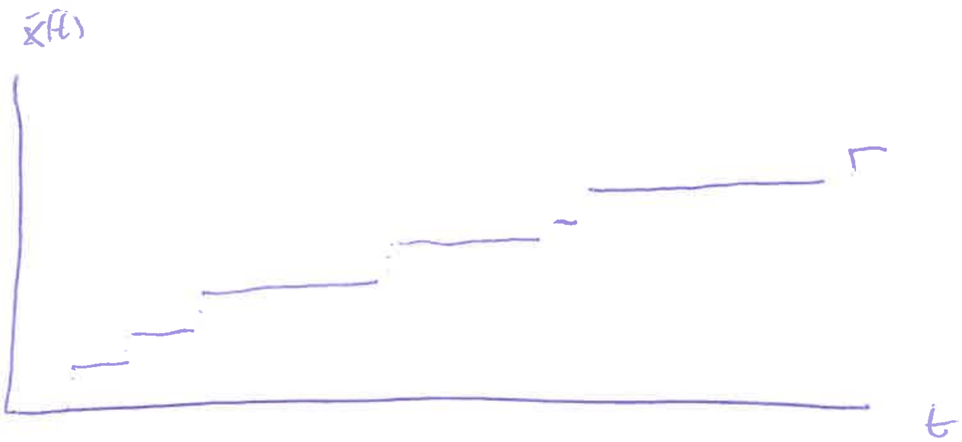
Diskreta fallet ex $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Kont fallet $T = [0, \infty)$

<u>ex</u> kont fallet Tjocklek hos pappret i en pappersmaskin



<u>ex:</u> <u>diskreta fallet</u> antalet kunder som kommit in i affären



En stokastisk process i diskret tid kallas även för kedja, följd eller tidsserie

Här slumpar vi fram tillstånd där tillståndsrummet kallas E

Vi kommer enbart ha diskreta tillståndsrum

<u>ex</u> $E = \{1, 2, 3\}$

$E = \{\text{sol}, \text{regn}, \text{molet}\}$

③

För en stok process gäller att

$$P(X(t_n) = x_n \cap X(t_{n-1}) = x_{n-1} \cap \ldots \cap X(t_0) = x_0) =$$

$$= P(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1} \cap \ldots \cap X(t_0) = x_0) \cdot$$

$$\cdot P(X(t_{n-1}) = x_{n-1} \mid X(t_{n-2}) = x_{n-2} \cap \ldots \; X(t_0) = x_0)$$

$$\cdot \; \ldots \ldots \quad P(X(t_1) = x_1 \mid X(t_0) = x_0) \cdot P(X(t_0) = x_0)$$

Markovprocesser

Def En stok. process är en Markovprocess om

om $P(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1} \cap X(t_{n-2}) = x_{n-2} \cap \ldots X(t_0) = x_0)$

$= P(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1})$ $\quad t_0 < t_1 < t_2 \ldots$

D.v.s en Markovprocess saknar minne.

För en Markovprocess gäller då att

$$P(X(t_n) = x_n \cap X(t_{n-1}) = x_{n-1} \cap \ldots \cap X(t_0) = x_0) =$$

$$= P(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \cdot P(X(t_{n-1}) = x_{n-1} \mid X(t_{n-2}) = x_{n-2})$$

$$\cdot \; \ldots \; \cancel{P(X_1(t_1) = x_1 \mid X_0(t_0)) \cdot P(X_0(t_0) = x_0}$$

$$= \ldots \ldots \; P(X(t_1) = x_1 \mid X(t_0) = x_0) \cdot P(X(t_0) = x_0)$$

Ska vi räkna ut sannolikheten att vi ska befinna oss i tillstånd j nästa gång behöver vi alltså bara veta var vi är nu (i tillstånd i) och övergångssannolikheten $p_{ij} = P(X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i)$

Vi sysslar endast med tidshomogena Markovprocesser. D.v.s. det gäller att

$$P(X(t+s) = j \mid X(s) = i) = P(X(t) = j \mid X(0) = i) = p_{ij}(t)$$

Ex på Markovprocesser är Brownsk rörelse, börskurser

I diskreta fallet Antal kunder i systemet eller antal "paket" som kommer in till en mobilmast eller Google sökmotor där varje tillstånd är en hemsida.

Matrisform

Vi ~~behöver~~ betraktar en diskret Markovkedja där $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$

där övergångsmatrisen $= P = (p_{ij})_{i,j \in E}$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & & & \\ p_{31} & & & \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & & & p_{nn} \end{pmatrix}$$

varje radsumma $= 1$ d.v.s. $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$

(5)

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & & p_{1k}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_{kk}^{(n)} \end{pmatrix}$$

där $p_{ij}^{(n)}$ är sannolikheten att vi befinner oss i tillstånd j om vi n tidpunkter tidigare befunnit oss i tillstånd i

$$P^{(1)} = P$$

~~[illegible]~~

Uthoppssannolikheten kallas $\tilde{P}_{ij}$ och är

$$P(\text{nästa gång vi lämnar } i \text{ kommer vi till } j) = \frac{P_{ij}}{1-P_{ii}}$$

Startfördelningen (för X_0) är en vektor $\underline{p}^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)} \ \ p_k^{(0)})$

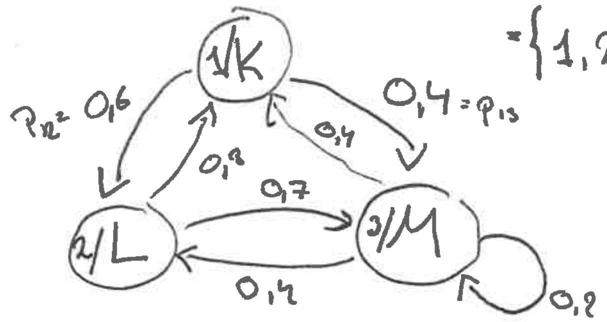
Fördelningen (för X_n) efter n tidssteg $= \underline{p}^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)} \ldots p_k^{(n)})$

6

Exempel: Sparka boll

$E = \{K, L, M\} = \{1, 2, 3\}$

tillståndsgraf:



1/K: Kalle har bollen

2/L: Lisa har bollen

3/M: Mats har bollen

X_k, vem har bollen efter k passningar

övergångssannolikheterna: $p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$

övergångsmatrisen
$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0 & 0,7 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

(!) Olika sätt att definiera en Markovkedja!

$$p^{(0)} = (1, 0, 0)$$

vill bestämma $p_2^{(2)} = \mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_0 = 1)$

standardsätt när man jobbar med Markovkedjor

$$\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_0 = 1) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = i) \cdot \mathbb{P}(X_1 = i \mid X_0 = 1)$$

(alla möjliga vägar)

$$= \sum_{i=1}^{3} p_{i2} \cdot p_{1i} = p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} + p_{13} \cdot p_{32}$$

$$= 0 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.34 & \overset{p_{12}^{(2)}}{0.16} & 0.50 \\ 0.28 & 0.46 & 0.26 \\ 0.20 & 0.32 & 0.48 \end{pmatrix}$$

$$p^{(2)} = p^{(0)} P^2 = (0.34, 0.16, 0.50)$$

Chapman-Kolmogorovs ekv se F. S §15.1.2 7

a) $P_{ij}^{(m+n)} = \sum P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$

b) $P^{(m+n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n)}$ a) $\iff$ b)

c) $P^{(n)} = P^{n}$ d) $\underline{p}^{(n)} = \underline{p}^{(0)} P^{(n)} = \underline{p}^{(0)} P^{n}$

$$P_{ij}^{(n+m)} = P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) = \text{olika vägar} =$$

$$= \sum_{k} P(X_{n+m} = j \cap X_n = k \mid X_0 = i) =$$

$$= \text{stok process} = \sum_{k} P(X_{n+m} = j \mid X_n = k \cap X_0 = i) \cdot P(X_n = k \mid X_0 = i)$$

$$= \text{markov} = \sum_{k} P(X_{n+m} = j \mid X_n = k) \cdot P(X_n = k \mid X_0 = i) =$$

$$= \sum P_{kj}^{(m)} \cdot P_{ik}^{(n)} \quad \text{d.v.s} \quad P^{(n+m)} = P^{(m)} P^{(n)}$$

men $P^{(n)} = P^{(n-1+1)} = P^{(n-1)} \cdot P = P^{(n-2)} \cdot P \cdot P \cdots = P^{n}$

Tag en komponent $p_j^{(n)}$: fördelningen $\underline{p}^{1} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)} \ldots)$

$$p_j^{(n)} = P(X_n = j) = \sum_{i} P(X_n = j \mid X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) =$$

$$= \sum_{i} P_{ij}^{(n)} \cdot p_i^{(0)} \quad \text{d.v.s} \quad \underline{p}^{(n)} = \underline{p}^{(0)} \cdot P^{(n)}$$