Tentamensskrivning sf1627 Matematik för ekonomer, 6 hp, 11/2/2012 14:00–19.00.

Hjälpmedel: miniräknare
Examinator: Harald Lang

KTH Teknikvetenskap

1. I ett projekt investeras 100'000 kronor idag och ytterligare 50'000 kronor om två år. Efter fem år ger projektet utdelningen 200'000 kronor. Beräkna projektets internränta.

2. Ett bankkonto ger *kontinuerlig* ränta 3% de närnasre fem åren. Idag finns 10'000 kronor på kontot. Man sätter in *kontimuerligt* $12'000 + 500t$ kronor per år på kontot ($t =$ tiden i år från idag) under fem år. Bestäm saldot efter fem år.

3. Ett företag gör vinsten $20x + 30y$ med kvantiteterna x och y av två insatsvaror. Därvid släpper företaget ut mängden $\frac{x^2}{12.8} + \frac{y^2}{6.4}$ av ett miljöskadligt ämne. Staten begränsar mängden utsläpp till 170. Bestäm skuggpriset på utsläppet. ("Skuggpriset" är den marginella vinstökning per extra utsläppsenhet företaget gör vid en marginell ökning av utsläppet.)

4. Efterfrågan på en vara ges av $Q^d = 4e^{-0.4p}$ och utbudet $Q^s = 4p - 8.5.$ Vi kan betrakta efterfrågan som noll för $p > 100,$ ($Q^d = 0$ för $p > 100.$)

a) Bestäm pris och kvantitet vid jämvikt.
b) Beräkna välfärdsöverskottet vid jämvikt.
c) Antag att producenten har monopol, och sätter priset till p = 3. Vad blir "dead weight loss" (dvs hur mycket minskar välfärdsöverskottet jämfört med jämviktsläget)?

5. Funktionen $z = z(x, y)$ definieras genom sambandet $x + 2yz + y^3 + z^3 = 8,$ för värden på x och y nära noll. Beräkna en approximation till $z = (0.05, 0.008)$ *genom att göra en linjär approximation* till $z(x, y)$ i närheten av $(x, y) = (0, 0)$.

6. Bevisa *Roys identitet!* Den säger följande: Antag att en konsument har nyttofunktionen $U(x_1, x_2)$ där x_1 och x_2 är de konsumerade kvantiteterna av två varor. Han maximerar sin nytta, givet priserna p_1 och p_2 och sin inkomst m. Han maximerar alltså sin nytta genom val av x_1 och x_2 under budgetrestriktionen $x_1 p_1 + x_2 p_2 = m$. Hans maximerade nytta beror nu på m; $U = U^*(m)$. Roys identitet säger nu att $\frac{\partial U^*}{\partial p_1} = -\frac{\partial U^*}{\partial m} x_1$. (Här är x_1 den kvantitet på första varan konsumenten valt.)

(I ord: marginella förändringen i nytta av en prisökning är minus marginalnyttan av inkomst multiplicerad med efterfrågan på varan.)

Ledning: Använd "envelopesatsen". Differentiera både $U(x_1, x_2)$ och budgetrestriktionen med m fixt.