SF1627: Matematik för ekonomer

Johan Nykvist

17 januari 2012

1 Repetition: Derivering

1.1 Produktregeln

$$\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{1}$$

Exempel: Derivera $h(x) = xe^x$. Vi ser att funktionen $h(x)$ är en produkt av två funktioner, nämligen $f(x) = x$ och $g(x) = e^x$. Dess derivator ges av $f'(x) = 1$ och $g'(x) = e^x$ och enligt produktregeln får vi således

$$\frac{d}{dx}\big(xe^x\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + xe^x = e^x(1+x).$$

1.1.1 Övningar

Derivera följande funktioner:

1. $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$
2. $f(x) = x^3 \ln(x)$
3. $f(x) = (x-1)e^x$
4. $f(x) = x^2 e^x \ln x$
5. $f(x) = x^3 (\ln x)^2$
6. $f(x) = \frac{1}{x^2} e^x$

1.2 Kvotregeln

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2} \tag{2}$$

Exempel: Derivera $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$. Vi ser att $h(x)$ är en kvot av två funktioner, nämligen $f(x) = e^x$ och $g(x) = x^2$. Dess derivator ges av $f'(x) = e^x$ och $g'(x) = 2x$ och enligt kvotregeln får vi således

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2e^x - 2xe^x}{x^4} = \frac{xe^x(x-2)}{x^4}.$$

1.2.1 Övningar

Derivera följande funktioner:

1. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
2. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
4. $f(x) = \frac{xe^x}{1+x^2}$
5. $f(x) = \frac{1+x^2}{xe^x}$

1.3 Kedjeregeln

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)g'(x) \tag{3}$$

Exempel: Derivera $h(x) = e^{x^2}$. Vi ser att om vi väljer $f(x) = e^x$ och $g(x) = x^2$ så får vi $f\big(g(x)\big) = f\big(x^2\big) = e^{x^2}$, det vill säga vi kan skriva $h(x) = f(g(x))$. Dess derivator ges av $f'(x) = e^x$ och $g'(x) = 2x$ och enligt kedjeregeln får vi således

$$\frac{d}{dx} e^{x^2} = \underbrace{e^{x^2}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)} = 2xe^{x^2}.$$

Termen $g'(x)$ i (3) är den inre derivatan.

1.3.1 Övningar

Derivera följande funktioner:

1. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
2. $f(x) = e^{-1/x}$
3. $f(x) = \ln(1 + x^2)$
4. $f(x) = x \ln(1 + x^2)$
5. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$
6. $f(x) = \ln(2 + e^{3x^2})$

1.4 Implicit derivering

I vissa ekonomiska tillämpningar händer det att funktionen som vi är intresserade av inte är explicit definierad utan istället ges *implicit* genom något samband.

$$y = x^2 - 8x + 4 \qquad \text{(Explicit)}$$
$$y + e^y = x^3 + x + 1 \qquad \text{(Implicit)}$$

Hur beräknar vi då funktionens derivata i en viss punkt?
Exempel: Antag att funktionen $y = y(x)$ är definierad *implicit* via sambandet

$$y + e^y = x^3 + x + 1,$$

och $y(0) = 0$. Vi vill bestämma derivatan $y'(0)$ och gör enligt följande:

1. Derivera bägge sidor med avseende på x. Då får vi

$$y' + y'e^y = 3x^2 + 1$$

2. Lös ut $y'(x)$:

$$y'(1 + e^y) = 3x^2 + 1 \Rightarrow y'(x) = \frac{3x^2 + 1}{1 + e^{y(x)}}$$

3. Sätt in $x = 0$ i ekvationen och utnyttja att vi vet att $y(0) = 0$.

$$y'(0) = \frac{3 \cdot 0^2 + 1}{1 + e^{y(0)}} = \frac{0 + 1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}.$$

1.4.1 Övningar

1. Funktionen $y = y(x)$ definieras genom sambandet $x^3 + x^2y + y^3 + y = 2$, $y(0) = 1$. Bestäm $y'(0)$.

2 Svar

2.1 Produktregeln

1. $f'(x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$
2. $f'(x) = x^2(3\ln x + 1)$
3. $f'(x) = xe^x$
4. $f'(x) = xe^x(2\ln x + x\ln x + 1)$
5. $f'(x) = x^2 \ln x(3\ln x + 2)$
6. $f'(x) = \frac{e^x}{x^2}\left(1 - \frac{2}{x}\right)$

2.2 Kvotregeln

1. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$
2. $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$
3. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$
4. $f'(x) = \frac{e^x(x^3 - x^2 + x + 1)}{(1+x^2)^2}$
5. $f'(x) = \frac{x^2 - x^3 - x - 1}{x^2 e^x}$

2.3 Kedjeregeln

1. $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
2. $f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$
3. $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
4. $f'(x) = \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}$
5. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
6. $f'(x) = \frac{6xe^{3x^2}}{2+e^{3x^2}}$

2.4 Implicit derivering

1. $y'(0) = 0$