1 Lösning till Tentamen 18/10, Uppgift 6

En producent har kostnadsfunktionen $C(x) = 1000(e^{0.01x} - 1)$, där x är producerad volym. Han är pristagare, dvs marknadensätter priset som är $p > 10$. Han maximerar sin vinst genom att välja optimal produktionsvolym, och får då vinsten $\hat{\pi}(p)$. Bestäm derivatan $\hat{\pi}'(p)$.

Lösning: Problemet som producenten står inför är att maximera vinsten, dvs vi har ett optimeringsproblem i en variabel utan bivillkor. Vinsten som funktion av x ges av

$$\pi(x) = px - C(x) = px - 1000(e^{0.01x} - 1).$$

För att maximera vinsten deriverar vi med avseende på x och sätter derivatan lika med noll. Då får vi

$$\pi'(x) = p - 10e^{0.01x} = 0,$$

vilket ger $\hat{x} = 100(\ln p - \ln 10)$.

Härifrån kan vi välja två vägar.

Alternativ 1 Den optimala vinsten beror av p, det vill säga vi har $\hat{\pi}(p) = \pi(\hat{x}(p), p)$. Derivera (och använd kedjeregeln), vilket ger

$$\frac{\partial \hat{\pi}(p)}{\partial p} = \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial x}}_{=0} \frac{\partial \hat{x}}{\partial p} + \frac{\partial \pi}{\partial p} = \frac{\partial \pi}{\partial p},$$

där vi har använt att i den stationära punkten är $\frac{\partial \pi}{\partial x} = 0$. Men $\frac{\partial \pi}{\partial p} = x$, så svaret ges alltså av $\hat{x} = 100(\ln p - \ln 10)$.

Alternativ 2 Sätt in $\hat{x}$ i vinstfunktionen vilket ger

$$\begin{aligned}\hat{\pi}(p) = \pi(\hat{x}) &= p(100 \ln p - 100 \ln 10) - 1000e^{\ln p - \ln 10} + 1000 \\ &= 100p \ln p - 100p \ln 10 - 100p + 1000\end{aligned}$$

Här ser vi nu explicit beroendet av p så för att få fram svaret behöver vi bara derivera med avseende på p. Då får vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\pi}(p)}{dp} &= 100 \ln p + 100 - 100 \ln 10 - 100 \\ &= 100(\ln p - \ln 10) \\ &= \hat{x}(p)\end{aligned}$$