Du skall göra en investeringsportfölj som innehåller dels en säker tillgång (statsobligation) som ger 3% ränta, dels i en aktie A som ger 7% förväntad avkastning, dels i en aktie B som ger 9% förväntad avkastning. Volatiliteten för A är 0.2, för B 0.3 och deras korrelationskoefficient är -0.4. Ditt totala kapital är 100 och portföljens volatilitet får vara (högst 0.1).

Om du investerar x i aktie A och y i aktie B och resten $100 - x - y$ i statsobligationer innebär det att du skall lösa följande problem för att få maximal förväntad avkastning:

$$\max_{x,y}(100 - x - y)0.03 + 0.07x + 0.09y$$

under bivillkoret

$$0.2^2x^2 + 0.3^2y^2 - 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.3xy = 0.1^2$$

a) Bestäm de optimala värdena på x, y och $100 - x - y$.

b) Bestäm den förväntade avkastningen för den optimala portföljen.

Lösning

a) Vi börjar med att ställa upp Lagrangefunktionen:

$$\begin{aligned} L(x, y) &= (100 - x - y)0.03 + 0.07x + 0.09y - \lambda(0.2^2x^2 + 0.3^2y^2 - 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.3xy - 0.1^2) \\ &= 3 + 0.04x + 0.06y - \lambda(0.04x^2 + 0.09y^2 - 0.024xy - 0.01) \end{aligned}$$

Därefter bestämmer vi de partiella derivatorna m.a.p. x och y och sätter dem lika med noll.

$$\begin{aligned} L'_x &= 0.04 - \lambda(0.08x - 0.024y) = 0 \\ L'_y &= 0.06 - \lambda(0.18y - 0.024x) = 0. \end{aligned}$$

Vi löser ut λ och får

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{0.04}{0.08x - 0.024y}, \\ \lambda &= \frac{0.06}{0.18y - 0.024x}. \end{aligned}$$

Om vi sätter uttrycken lika med varandra får vi

$$\begin{gathered} \frac{0.04}{0.08x - 0.024y} = \frac{0.06}{0.18y - 0.024x} \Rightarrow \\ 0.04(0.18y - 0.024x) = 0.06(0.08x - 0.024y) \Rightarrow \\ 0.0072y - 0.00096x = 0.0048x - 0.00144y \Rightarrow \\ 0.00864y = 0.00576x \Rightarrow \\ y = \frac{2}{3}x \end{gathered}$$

Sätt in i bivillkoret:

$$
\begin{aligned}
0.01 &= 0.04x^2 + 0.09\left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 0.024x\frac{2}{3}x \\
&= \left(0.04 + 0.09\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 0.024\frac{2}{3}\right)x^2 \\
&= \frac{8}{125}x^2
\end{aligned}
$$

Alltså är $x^2 = 5/32$ och slutligen får vi $x = \sqrt{5/32}$, $y = \sqrt{5/72}$.