Exempel
Vi lånar K kronor idag och amorterar med $a(1+\delta)^{k-1}$ kronor om k år, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Om räntan är r kronor per år, hur lång tid tar det innan lånet är amorterat? Antag att $\delta \neq r$. *Ledning:* Lånet är återbetalat då nuvärdet av amorteringarna är lika med lånets storlek.

Lösning
Börja med att ställa upp kassaflödet i en tabell (precis som vi har gjort på föreläsningarna). Antag att lånet är återbetalat år N. Då har vi

t	0	1	2	$\ldots$	N
\$	$-K$	a	$a(1+\delta)$	$\ldots$	$a(1+\delta)^{N-1}$
PV	$-K$	$\frac{a}{1+r}$	$\frac{a(1+\delta)}{(1+r)^2}$	$\ldots$	$\frac{a(1+\delta)^{N-1}}{(1+r)^N}$

Från tabellen ser vi att totala nuvärdet av kassaflödet kan skrivas som

$$
\begin{aligned}
PV &= -K + \frac{a}{1+r} + \frac{a(1+\delta)}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{a(1+\delta)^{N-1}}{(1+r)^N} \\
&= -K + \frac{a}{1+r}\left(1 + \frac{1+\delta}{1+r} + \left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^{N-1}\right) \\
&= -K + \frac{a}{1+r}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^k = \{\text{Geometrisk summa}\} \\
&= -K + \left(\frac{a}{1+r}\right)\left(\frac{\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^N - 1}{\frac{1+\delta}{1+r} - 1}\right) \\
&= -K + \left(\frac{a}{1+r}\right)\left(\frac{\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^N - 1}{\frac{\delta-r}{1+r}}\right) \\
&= -K + \left(\frac{a}{1+r}\right)\left(\frac{1+r}{\delta-r}\right)\left(\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^N - 1\right) \\
&= -K + \frac{a}{\delta-r}\left(\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^N - 1\right)
\end{aligned}
$$

Poängen med att förenkla uttrycket för nuvärdet är att vi måste lösa ut N. Vi söker nu N så att totala nuvärdet är lika med noll. Alltså, bestäm N så att

$$
-K + \frac{a}{\delta-r}\left(\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^N - 1\right) = 0
$$

Då får vi

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{\delta - r}\left(\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^N - 1\right) = K \Rightarrow \\
&\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^N - 1 = \frac{K(\delta - r)}{a} \Rightarrow \\
&\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)^N = 1 + \frac{K(\delta - r)}{a} = \frac{a + K(\delta - r)}{a} \Rightarrow \\
&N \ln\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right) = \ln\left(\frac{a + K(\delta - r)}{a}\right) \Rightarrow \\
&N = \frac{\ln\left(\frac{a+K(\delta-r)}{a}\right)}{\ln\left(\frac{1+\delta}{1+r}\right)} = \frac{\ln\left(a + K(\delta - r)\right) - \ln a}{\ln\left(1+\delta\right) - \ln\left(1+r\right)}
\end{aligned}
$$