1 Övningar till föreläsningen 8/2 2012

1.1 Övningar: Lagrange's multiplikatormetod

1. Använd Lagrange's metod för att bestämma lösningen till

$$\max_{x,y} xy \quad \text{under bivillkoret} \quad x + 3y = 24.$$

2. Bestäm största och minsta värdet av $x + 2y$ under bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$.

3. Använd Lagrange's metod för att bestämma lösningen till

$$\min_{Q_1,Q_2} -40Q_1 + Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 20Q_2 + Q_2^2 \quad \text{under bivillkoret} \quad Q_1 + Q_2 = 15.$$

4. Bestäm största värdet av x^2y^2 under bivillkoret $x^2 + 2y^2 = 1$. Vad är minsta värdet? Kan du se det utan att göra några kalkyler?

5. Ett företag har produktionsfunktionen $Q(K, L) = \sqrt{KL}$, där K är kapital och L är arbetskraft. Priserna för dessa insatsvaror är r respektive w så den totalt kostnaden är $rK + wL$. Företaget minimerar kostnaden för en given produktionsvolym Q. Bestäm företagets marginalkostnad (uttryckt i r, w och Q).

6. Ett företag har produktionsfunktionen $F(K, L)$, där K och L är insatsvarorna kapital och arbetskraft. Priserna på insatsvarorna är r respektive w. Företaget minimerar sin kostnad för en given produktion $Q = F(K, L)$. Visa att $\frac{F'_K}{F'_L} = \frac{r}{w}$.

1.2 Övningar: Envelopesatsen

1. Vid konsumtionen av varorna X och Y har en person nyttofunktionen

$$U(x, y) = x^{0.4}y^{0.6}.$$

Vara X kostar 2 kronor per enhet och vara Y kostar 3 kronor per enhet.

a) Hur fördelar personen inköpen om hon disponerar 360 kr?

b) Hur stor nytta uppnår personen i nyttomaximum?

c) Ungefär hur stor nyttoökning får personen om hon får 1 krona mer att handla för? (Nya inköpskvantiteter ska inte beräknas!)

2. Vid konsumtionen av varorna X och Y har en person nyttofunktionen

$$U(x, y) = 0.5 \ln x + 0.8 \ln y.$$

Vara X kostar 1.25 kronor per enhet och vara Y kostar 4 kronor per enhet.

a) Hur fördelar personen inköpen om hon disponerar 65 kr?

b) Hur stor nytta uppnår personen i nyttomaximum?

c) Hur påverkas personens nytta (ungefär) om hon har 1 krona mer att handla för?

3. En konsument har nyttofunktionen $U(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ då han konsumerar kvantiteterna x respektive y av två varor. Priserna på de två varorna är p respektive q och totalt spenderar han m på de två varorna. Antag att konsumenten maximerar sin nytta och bestäm de maximala kvantiteterna x^* och y^*. Bestäm också marginalnyttan av inkomst uttryckt i p, q och m.

4. a) Bestäm det största värde x kan anta om $2x^2 + xy + 3y^2 = 276$.

   b) Låt $x(c)$ vara det största värde x kan anta om $2x^2 + xy + 3y^2 = c$. Använd Envelopesatsen för att bestämma derivatan $x'(276)$.

5. Definiera $f(c)$ genom $f(c) = \max_{x,y} x + y$ under bivillkoret $3x^2 + 4y^2 = c$. Bestäm derivatan $f'(c)$.

6. Bestäm med hjälp av Lagrangemetoden de punkter där funktionen

$$f(y, z) = z^3 + yz$$

   kan ha extremvärden under bivillkoret $y + 3z + 24 = 0$.

7. Du skall göra en investeringsportfölj som innehåller dels en säker tillgång (statsobligation) som ger 3% ränta, dels i en aktie A som ger 7% förväntad avkastning, dels i en aktie B som ger 9% förväntad avkastning. Volatiliteten för A är 0.2, för B 0.3 och deras korrelationskoefficient är -0.4. Ditt totala kapital är 100 och portföljens volatilitet får vara (högst 0.1).

   Om du investerar x i aktie A och y i aktie B och resten $100 - x - y$ i statsobligationer innebär det att du skall lösa följande problem för att få maximal förväntad avkastning:

$$\max_{x,y}(100 - x - y)0.03 + 0.07x + 0.09y$$

   under bivillkoret

$$0.2^2x^2 + 0.3^2y^2 - 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.3xy = 0.1^2$$

   a) Bestäm de optimala värdena på x, y och $100 - x - y$.

   b) Bestäm den förväntade avkastningen för den optimala portföljen.

2 Svar

2.1 Lagrange's multiplikatormetod

1. Maximala värdet är 48 då $x = 12$ och $y = 4$.

2. Största värdet är $\sqrt{5}$ (då $x = 1/\sqrt{5}$ och $y = 2/\sqrt{5}$). Minsta värdet är $-\sqrt{5}$ då $x = -1/\sqrt{5}$ och $y = -2/\sqrt{5}$.

3. $Q_1 = 10$, $Q_2 = 5$

4. Största värdet är $1/8$. Minsta värdet är 0 (varför?).

5. Marginalkostnaden är $2\sqrt{rw}$ vid alla produktionsvolymer.

2.2 Envelopesatsen

1. a) $x = 72$, $y = 72$
   b) Nyttan är 72.
   c) Nyttoökningen blir approximativt $\lambda = 0.2$.

2. a) $x = 20$, $y = 10$
   b) Nyttan är $0.5 \ln 20 + 0.8 \ln 10$
   c) Nyttoökningen blir approximativt $\lambda = 0.02$.

3. $x^* = \frac{mq}{pq+p^2}$, $y^* = \frac{mp}{pq+q^2}$, marginalnyttan är $\frac{\sqrt{p+q}}{2\sqrt{mpq}}$.

4. Det största värdet x kan anta är 12. Derivatan är $x'(276) = 1/46$.

5. $f'(c) = \frac{7}{48c}$

6. Möjliga extrempunkter är $(x_1, y_1) = (-2, -18)$ och $(x_2, y_2) = (4, -36)$.

7. Se tentamen 18/10/2011, uppgift 2.