1 Övningar till föreläsningen 1/2 2012

1.1 Derivering

1. Bestäm $\partial z/\partial x$ och $\partial z/\partial y$:

   a) $z = 2x + 3y$
   b) $z = x^2 + y^3$
   c) $z = x^3y^4$
   d) $z = (x + y)^2$
   e) $z = x^2 + 3y^2$
   f) $z = xy$
   g) $z = 5x^4y^2 - 2xy^5$
   h) $z = e^{x+y}$
   i) $z = e^{xy}$
   j) $z = e^x/y$
   k) $z = \ln(x + y)$
   l) $z = \ln(xy)$

2. Bestäm samtliga första- och andraderivator:

   a) $z = x^2 + e^{2y}$
   b) $z = y\ln(x)$
   c) $z = xy^2 - e^{xy}$
   d) $z = x^y$

1.2 Differentialer och linjär approximation

1. Bestäm differentialen till $z(x, y) = xy^2 + y^3$.

2. Bestäm differentialen till följande funktioner:

   a) $z = x^3 + y^3$
   b) $z = xe^{y^2}$
   c) $z = \ln(x^2 - y^2)$

3. Bestäm ett approximativt värde till $T = \sqrt{2.01^2 + 2.99^2 + 6.02^2}$ och jämför med det exakta värdet. *Ledning:* Låt $F(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Bestäm differentialen till F i punkten $(x,y,z) = (2,3,6)$ och använd (se föreläsningen) att $F(x + dx, y + dy, z + dz) \approx F(x,y,z) + dF(x,y,z)$.

4. Funktionen $z = z(x, y)$ bestäms genom sambandet

$$x^3 + y^2z + z^3 + x^2y = 42,$$

   där $z(1, 2) = 3$. Bestäm de partiella derivatorna $z'_x(1, 2)$ och $z'_y(1, 2)$.

5. Funktionen $z = z(x, y)$ ges av $xz^3 + 2xy^2 + x^2z = 4$, $z(1, 1) = 1$. Bestäm ett närmevärde till $z(1.05, 0.96)$.

6. Funktionen $z = z(x, y)$ definieras genom sambandet $z \ln(z) + xy \ln(x + y) \equiv 20$ (x, y och z är alla positiva). Bestäm differentialen dz uttryckt i dx and dy för $(x, y) = (2, 3)$. Använd fyra decimalers precision i svaret.

7. Funktionen $z = z(x, y)$ definieras genom sambandet $x + 2yz + y^3 + z^3 = 1$, för värden på x och y nära noll. Bestäm den linjära approximationen till $z(x, y)$ i närheten av $(x, y) = (0, 0)$.

2 Svar

2.1 Derivering

1. a) $z'_x = 2$, $z'_y = 3$
   b) $z'_x = 2x$, $z'_y = 3y^2$
   c) $z'_x = 3x^2y^4$, $z'_y = 4x^3y^3$
   d) $z'_x = 2(x+y)$, $z'_y = 2(x+y)$
   e) $z'_x = 2x$, $z'_y = 6y$
   f) $z'_x = y$, $z'_y = x$
   g) $z'_x = 20x^3y^2 - 2y^5$, $z'_y = 10x^4y - 10xy^4$
   h) $z'_x = e^{x+y}$, $z'_y = e^{x+y}$
   i) $z'_x = ye^{xy}$, $z'_y = xe^{xy}$
   j) $z'_x = e^x/y$, $z'_y = -e^x/y^2$
   k) $z'_x = 1/(x+y)$, $z'_y = 1/(x+y)$
   l) $z'_x = 1/x$, $z'_y = 1/y$

2. a) $z'_x = 2x$, $z'_y = 2e^{2y}$, $z''_{xx} = 2$, $z''_{yy} = 4e^{2y}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$
   b) $z'_x = y/x$, $z'_y = \ln(x)$, $z''_{xx} = -y/x^2$, $z''_{yy} = 0$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 1/x$
   c) $z'_x = y^2 - ye^{xy}$, $z'_y = 2xy - xe^{xy}$, $z''_{xx} = -y^2e^{xy}$, $z''_{yy} = 2x - x^2e^{xy}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 2y - e^{xy} - xye^{xy}$
   d) $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y\ln(x)$, $z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$, $z''_{yy} = x^y(\ln(x))^2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = x^{y-1} + x^{y-1}y\ln(x)$

2.2 Differentialer och linjär approximation

1. $dz = y^2dx + (2xy + 3y^2)dy$

2. a) $dz = 3x^2dx + 3y^2dy$
   b) $dz = e^{y^2}dx + 2xye^{y^2}dy$
   c) $dz = \frac{2x}{x^2-y^2}dx - \frac{2y}{x^2-y^2}dy$

3. Ett approximativt värde är $7 + \frac{11}{700} \approx 7.01571429$ (det exakta värdet är 7.0157395).

4. $z'_x(1{,}2) = -7/31$, $z'_y(1{,}2) = -13/31$

5. $1 - \frac{9}{400} = 0.9775$

6. $dz \approx -2.1786dx - 1.5970dy$

7. $z(x{,}y) \approx 1 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$