1 Övningar till föreläsningen 25/1 2012

1.1 Geometrisk summa

1. Härled följande uttryck för en geometrisk summa:

   a) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$;

   b) $\sum_{k=1}^{n} a^k = a\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)$;

   c) $\sum_{k=7}^{n} a^k = a^7\left(\frac{1-a^{n-6}}{1-a}\right)$.

1.2 Diskreta kassaflöden

1. Vad är nuvärdet av 15 årliga insättningar på \$3500 om den första insättningen sker om ett år och den årliga räntan är 12%?

2. a) Ett sparkonto med 4% avkastning har varit orört i flera år. Idag är saldot 100.000 kronor. Hur mycket fanns på kontot för 10 år sedan?

   b) Vid slutet av varje år under 4 år sätter du in 10.000 kronor på ett konto med 6% årlig ränta. Vad är saldot vid slutet av år 4?

3. Antag att du får följande två förslag:

   i) 13.000 kronor betalas ut om 10 år, eller

   ii) 1.000 kronor betalas ut varje år under 10 år, första betalningen sker om ett år.

   Vilket förslag bör du välja om den årliga räntan är 6%?

4. Du har en betalström $a(k) = 100 + 5k$, $k = 1, \ldots, 10$. Den kontinuerliga räntan är 4%. Bestäm nuvärdet av betalströmmen.

5. Ett kassaflöde ger $a(1+d)^k$ efter k år, $k = 5, 6, \ldots, 50$. Räntan är r per år. Bestäm nuvärdet av detta kassaflöde. Vi kan anta att $r > d$.

6. En person lånar 80.000 kronor vid början av år noll och ska betala tillbaka lånet genom 10 lika stora amorteringar i slutet av varje år. Om räntan är 7%, hur stor blir den årliga amorteringen?

7. Vi lånar K kronor idag och amorterar med $a(1+\delta)^{k-1}$ kronor om k år, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Om räntan är r kronor per år, hur lång tid tar det innan lånet är amorterat? Antag att $\delta \neq r$. *Ledning:* Lånet är återbetalat då nuvärdet av amorteringarna är lika med lånets storlek.

1.3 Kontinuerliga kassaflöden

1. Bestäm nuvärdet och dåvärdet av en kontinuerlig kassaström på 500 kronor per år om räntan (kontinuerlig) är 6% per år och kassaströmmen löper under 15 år.

2. Du har en betalström $a(t) = 100 + 5t$, $0 \leq t \leq 10$. Den kontinuerliga räntan är 4%. Bestäm nuvärdet av betalströmmen.

3. Man sätter kontinuerligt in $100+5t$ kronor per tidsenhet vid tiden t år, $0 \leq t \leq 10$. Räntan $r = 4\%$ per år adderas kontinuerligt till kontot. Bestäm saldot efter 10 år.

4. Samma fråga som i 7 ovan, men vi har kontinuerlig förräntning r och betalar kontinuerlig amortering $a(t) = ae^{\delta t}$ per tidsenhet.

5. Ett lån på 100.000 kronor återbetalas med kontinuerlig amortering $10.000e^{0.04t}$ kronor ($t =$ tid i år) per år. Räntan debiteras skulden kontinuerligt med 3% per år. Bestäm tiden T då lånet är återbetalat.

6. Du har ett lån på 100.000 kronor och betalar tillbaka med en kontinuerlig betalström $a(t) = 10.000 \ln(3 + 0.3t)$ kronor per år, där t är tiden i år från nu. Räntan på lånet är 4% per år med kontinuerlig förräntning. Bestäm tiden det tar tills lånet är återbetalat.

1.4 Internränta

1. Du kan investera 50.000 kronor i ett projekt som genererar 30.000 kronor i slutet av de två kommande åren. Vad är projektets internränta? Om bankräntan är 10%, bör vi investera i projektet?

2. Investeringen i en maskin förväntas generera en vinst på 400.000 kronor varje år. Vad är det maximala priset vi bör betala om maskinen har en livstid på 7 år, räntan är 17.5%, och den årliga vinsten betalas i slutet av varje år?

3. Du kan investera 100.000 kronor i ett av två projekt, A och B. Projekt A ger tillbaka 160.000 kronor efter fem år. Projekt B ger 40.000 kronor efter tre år, och 50.000 kronor efter fyra år, och 60.000 kronor efter fem år. Vilket av projekten ger den högsta internräntan?

2 Svar

2.1 Diskreta kassaflöden

1. PV $= 23838.03$
2. a) 67556.42
   b) 43746.16
3. Alternativ 2 ($PV_1 = 7259.12$, $PV_2 = 7360.09$)
4. PV $= 1016.68$
5. PV $= a\left(\frac{1+d}{r-d}\right)\left[\left(\frac{1+d}{1+r}\right)^4 - \left(\frac{1+d}{1+r}\right)^{50}\right]$
6. Den årliga amorteringen blir 11390.20.
7. Tiden tills lånet är betalat ges av $\frac{\ln(a+K(\delta-r))-\ln a}{\ln(1+\delta)-\ln(1+r)}$.

2.2 Kontinuerliga kassaflöden

1. PV $= \frac{25000}{3}\left(1-e^{-0.09}\right) \approx 4945.25$, FV $= 12163.36$
2. PV $= 1016.55$
3. Saldot efter tio år är 1516.51.
4. Tiden tills lånet är betalat ges av $\frac{\ln(K(\delta-r)+a)-\ln a}{\delta-r}$
5. Tiden tills lånet är betalat ges av $100\ln 1.1 \approx 9.53$
6. Tiden tills lånet är betalat är 8.308 år (måste lösas numeriskt!)

2.3 Internränta

1. Projektets internränta är 13.07 %. Om bankräntan är 10 % ser vi att projektets internränta är högre, dvs projektet ger högre avkastning än att sätta pengarna på banken. Alltså investerar vi i projektet.
2. 1.546.522 kronor.
3. Projekt B