KTH Matematik

Tentamensskrivning i matematik för ekonomer, sf1627, 18/10/2011 14:00–19:00. ***Hjälpmedel:*** **miniräknare.** ***Examinator:*** **Harald Lang.**

Lösningarna skall vara väl motiverade, d.v.s. du skall tala om hur du resonerat och vilka satser du använt. Om du använder en rutin på miniräknaren skall du ange den underliggande formeln, men du behöver inte tala om precis hur man gör på miniräknaren..

---

1. Utbudsfunktionen för en vara är $q^s = 7.35p - 0.005p^2 - 73$ för $p \geq 10$. Efterfrågefunktionen är $q^d = 100 - p - 0.02p^2$ för $p \leq 50$. (Här är p priset, och q kvantittet.)

   a) Bestäm totala välfärden W, givet att priset är jämviktspriset ($q^s = q^d$).

   b) Bestäm *producentöverskottet* (d.v.s. vinsten) om $p = 25$.

2. Du skall investera värdet x i en tillgång (aktie, t.ex.) som ger förväntad avkastning 0.08 och volatilitet 0.3, och investera y i en tillgång som ger förväntad avkastning 0.11 och volatilitet 0.4. (Dessa avkastningar är okorrelerade, antar vi.) Ditt återstående kapital $1 - x - y$ skall du investera i en säker obligation som ger avkastningen 0.04. Du skall göra detta så att du får maximal förväntad avkastning, under bivillkoret att volatiliteten i din portfölj är (högst) 0.1. Det innebär att du skall lösa problemet

   $$\max_{x,y} 0.04(1-x-y) + 0.08x + 0.11y \text{ under bivillkoret } 0.3^2x^2 + 0.4^2y^2 = 0.1^2.$$

   a) Bestäm de optimala värdena på x och y och $r = 0.04(1-x-y) + 0.08x + 0.11y$. ($r$ är den förväntade avkastningen på din portfölj.)

   b) Låt $r(v) = \max_{x,y} 0.04(1-x-y) + 0.08x + 0.11y$ under bivillkoret $0.3^2x^2 + 0.4^2y^2 = v$.

   Bestäm differentialen $dr = r'(0.1^2)\,dv$ och använd denna för att bestämma ett approximativt värde på $r(0.11^2)$.

3. Funktionen $z = z(x,y)$ är definierad genom sambandet $z\ln(z) + xy\ln(x+y) \equiv 20$ (x, y och z är alla positiva). Bestäm differentialen dz uttryckt i dx och dy för $(x,y) = (2,3)$. Använd fyra decimalers precision i svaret.

4. Du kan investera 100’000 kronor i ett av två projekt, A och B. Projekt A ger tillbaka 160’000 kronor efter fem år. Projekt B ger 40’000 kronor efter tre år, och 50’000 kronor efter fyra år, och 60’000 kronor efter fem år. *Vilket av projekten ger den högsta internräntan?*

5. Du har ett lån på 100’000 kronor och betalar tillbaka med en kontinuerlig betalström $a(t) = 10'000\ln(3 + 0.3t)$ kronor per år; t är tiden i år från ”nu”. Räntan på lånet är 4% per år med kontinuerlig förräntning. *Bestäm tiden det tar tills lånet är återbetalat.*

6. En producent har kostnadsfunktionen $C(x) = 1'000(e^{0.01x} - 1)$, där x är producerad volym. Han är pristagare, dvs ”marknaden” sätter priset som är $p > 10$. Han maximerar sin vinst genom att välja optimal produktionsvolym, och får då vinsten $\hat{\pi}(p)$. Bestäm derivatan $\hat{\pi}'(p)$.

Svar

1. a) W = 1’530.83   b) vinsten = 667.03

2. a) $x = 0.2020, \quad y = 0.1989, \quad r = 0.06200$

   b) $dr = 1.1000\,dv, \quad r(0.11^2) \approx r(0.1^2) + 1.1000\,(0.11^2 - 0.1^2) \approx 0.0643.$

3. Vi får $z = 5.85350.$

   $(1+\ln(z))dz + \left(y\ln(x+y) + \dfrac{xy}{x+y} \right)dx + \left(x\ln(x+y) + \dfrac{xy}{x+y} \right)dy = 0$ ger

   $2.76704\,dz + 6.02831\,dx + 4.418876\,dy = 0$ som ger

   $dz = -2.1786\,dx - 1.5970\,dy$

4. Projekt A ger internräntan 9.400%, prokekt B ger internräntan 9.887% (räknat med kontinuerlig förräntnig). Projekt B ger alltså den högsta internräntan.

5. 8.308 år. (Vi använder miniräknarens rutin för numerisk integration, och ”solver”.)

6. $\hat{\pi}'(p) = 100\ln(0.1p).$