KTH Matematik
Lars Filipsson

Matematik fördjupning
Inlämningsuppgifter 1

1. Om x är irrationellt och r är rationellt, vad kan du säga om $x + r$ och xr?

2. Visa med hjälp av supremumegenskapen att det finns ett reellt tal y sådant att $y^2 = 3$. Visa också att detta y är irrationellt. För högre betyg: visa att det för varje $n \in \mathbf{N}$ och varje rellt tal $x > 0$ finns ett $y > 0$ sådant att $y^n = x$.

3. Visa att villkoret $x > 0,\ y > 0 \implies xy > 0$ är ekvivalent med villkoret $x < y,\ z > 0 \implies xz < yz$.

4. Bevisa med Peanos axiom att $1 + y = y + 1$ för alla naturliga tal y. För högre betyg: Bevisa med Peanos axiom att addition av naturliga tal är en kommutativ operation.

5. Bevisa de Morgans lagar: för alla mängder A och B gäller att $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ och $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. För högre betyg: generalisera till mer än två mängder.

6. Går det att införa en ordningsrelation på $\mathbf{C}$?

7. Anta att $A \subset \mathbf{R}$ och att $\sup A = y \in \mathbf{R}$. Visa att för varje $n \in \mathbf{N}$ existerar ett tal $y_n \in A$ sådant att $|y - y_n| < 1/n$.

8. Är mängden av alla följder av nollor och ettor uppräknelig?

9. Skriv upp två (för högre betyg minst tre) olika sätt att definiera vad som menas med att en funktion mellan två metriska rum A och B är kontinuerlig och visa att de är ekvivalenta.

10. Visa (för högre betyg: visa på minst två olika sätt) att en kontinuerlig funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ antar ett största och ett minsta värde.

11. Bevisa med hjälp av Dedekindsnitt att $\mathbf{R}$ är en ordnad mängd. För högre betyg: visa också att $\mathbf{R}$ har supremumegenskapen.

12. Visa att intervallet $(0, 1)$ är en öppen delmängd av $\mathbf{R}$ men inte av $\mathbf{R}^2$.

13. Är $\mathbf{Q}$ en öppen delmängd av $\mathbf{R}$? Sluten? Vilka punkter är inre punkter? Hopningspunkter? Vad är tillslutningen av $\mathbf{Q}$?

14. Låt M vara ett metriskt rum försett med den diskreta metriken. Visa att varje delmängd av M är både öppen och sluten. För högre betyg: visa också att alla funktioner definierade på M är kontinuerliga.

15. Visa att alla isometrier är kontinuerliga.

16. Visa att varje monoton och begränsad talföljd i $\mathbf{R}$ är konvergent.

17. Låt A vara en sluten delmängd av en kompakt mängd B. Ge ett direkt bevis för att varje öppen övertäckning av A har en ändlig delövertäckning.

18. Visa att $d(x, y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ är en metrik på $\mathbf{R}^2$ och visa att denna metrik är begränsad. För högre betyg: visa att identitetsavbildningen är en homeomorfism från euklidiska $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$ med d-metriken.

19. Anta att $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ är sådan att $x \mapsto f(x, y_0)$ är kontinuerlig för varje fixt y_0 och $y \mapsto f(x_0, y)$ är kontinuerlig för varje fixt x_0. Måste f då vara kontinuerlig?

20. Låt M vara ett metriskt rum och $f : M \to \mathbf{R}$ kontinuerlig. Visa att $Z(f) = \{p \in M : \ f(p) = 0\}$ är en sluten mängd.