KTH Matematik
Lars Filipsson

Matematik fördjupning
Möte 5-6 den 15-16 november

Några frågor att reflektera över

Varför nöjer man sig inte med gamla hederliga $\mathbf{R}^n$? Varför måste man prompt abstrahera ytterligare och hitta på allmänna metriska rum?

Varför är det så praktiskt att veta att Cauchy-följder konvergerar?

Varför är det rimligt att kalla den diskreta metriken för en metrik? På vilka grunder skulle man neka den rätt att kalla sig metrik?

Några ord på vägen

Metrik och metriskt rum
Fullständigt metriskt rum
Talföljd
Delföljd
Cauchy-följd
Konvergens
Kontinuitet

Några övningsuppgifter

1. Visa att $d(x, y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ är en metrik på $\mathbf{R}^2$. Visa att den är begränsad. Visa att identitetsavbildningen är en homeomorfism från vanliga euklidiska $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$ med metriken d.

2. Visa att varje begränsad monoton talföljd i $\mathbf{R}$ är konvergent.

3. Visa att alla isometrier är kontinuerliga.

4. Låt $f : [0, 1] \to [0, 1]$ vara kontinuerlig. Visa att f har minst en fixpunkt, dvs en punkt x sådan att $f(x) = x$.

5. Anta att $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ är sådan att $x \mapsto f(x, y_0)$ är kontinuerlig för varje fixt y_0 och $y \mapsto f(x_0, y)$ är kontinuerlig för varje fixt x_0. Måste då f vara kontinuerlig?

6. Kan du använda fullständigheten hos $\mathbf{R}$ för att bevisa fullständighet hos $\mathbf{R}^2$? Kan du använda någon modifierad intervallhalveringsteknik för att bevisa Bolzano-Weierstrass sats i $\mathbf{R}^2$?