KTH Matematik
Lars Filipsson

Matematik fördjupning
Möte 4 den 10 november

1. Visa att det finns ett reellt tal y sådant att $y^3 = 7$. Visa också att detta tal y är irrationellt.
2. Anta att $A \subset \mathbf{R}$ och att $\sup A = y \in \mathbf{R}$. Visa att för varje $n \in \mathbf{N}$ existerar ett tal $x_n \in A$ sådant att $|y - x_n| < 1/n$.
3. Visa att $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ för alla mängder A, B, C. Rita figur också.
4. Låt P vara utsagan "Om $2+2 = 5$ så är jag Kalle Anka". Är detta en sann utsaga? På hur många olika logiskt ekvivalenta sätt kan ni skriva den? Om Q är utsagan "Det är inte sant att jag inte är Kalle Anka och att $2+2 = 5$". Är då P ekvivalent med Q?
5. Finns talet i? Hur definieras det i så fall?
6. Skriv ner vad det betyder att $\mathbf{R}$ är en ordnad kropp med supremumegenskapen. Använd det ni skrivit ner för att bevisa att $x + y = x \implies y = 0$.
7. Finns det någon bijektion mellan $\mathbf{N}$ och mängden av alla decimaltal mellan 0 och 1 som bara har nollor och ettor som decimaler?
8. Definiera en relation $\sim$ på $\mathbf{Z}$ genom att låta $n \sim m$ om det finns ett tal $k \in \mathbf{Z}$ sådant att $n - m = 2k$. Är detta en ekvivalensrelation? Vilka är i så fall ekvivalensklasserna?
9. Bevisa med Peanos axiom för de naturliga talen att addition av naturliga tal är en kommutativ operation. Tips: skriv ner hur additionen definieras, börja sedan med att visa att $1 + y = y + 1$ för alla $y \in \mathbf{N}$ och använd induktionsaxiomet flitigt!
10. Definiera vad som menas med att en funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig och förklara sedan varför en sådan f måste anta ett största och minsta värde och alla värden däremellan. Vilka olika nivåer av förklaring finns det?