# Lösningar till tentamen den 14/1 2006, 5B1304

1. Insättning $y = x^r$ i den homogena ekvationen ger ekvationen $\left(r(r-1)(r-2) + r(r-1) - 4r\right)x^r = 0$ och vidare $r(r^2 - 2r - 3) = 0 \Rightarrow r = 0,\ r = -1$ och $r = 3$.
Den homogena ekv. har lösningen $y = C_1 + C_2 x^{-1} + C_3 x^3$.
En partikulärlösning kan sökas på formen $y = Ax^2 + Bx$. Vi får $x^2 \cdot 2A - 4x(2Ax + B) = 3x^2$
$\Rightarrow A = -\frac{1}{2},\ B = 0$.
Den allmänna lösningen är $\underline{\underline{y = C_1 + C_2 x^{-1} + C_3 x^3 - \frac{1}{2}x^2}}$.

---

2. Låt $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ där $a_0 \neq 0$. Derivering och insättning i ekvationen $xy'' + 2y' + xy = 0$ leder till ekvationen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n(n+r)(n+r-1) + 2a_n(n+r)\right)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Med byte av summeringsindex $n = k-2$ blir den andra summan $\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+r-1}$. Vi får ekvationen $a_0 r(r+1)x^{r-1}$

$$+ a_1(r+1)(r+2)x^r + \sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n(n+r)(n+r+1) + a_{n-2}\right)x^{n+r-1} = 0.$$

$\Rightarrow r(r+1) = 0 \quad r = 0$ eller $r = -1$.

Om $r = 0 \quad a_1 \cdot 2 = 0 \quad a_1 = 0,\ a_n n(n+1) + a_{n-2} = 0$

$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)} \quad n = 2, 3, \ldots$

$a_2 = -\frac{1}{6}a_0,\ a_3 = 0,\ a_4 = -\frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{120},\ a_5 = 0, \ldots$

$y = a_0\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \ldots\right)$

Om $r = -1 \quad a_n(n-1)n + a_{n-2} = 0 \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)} \quad n \geq 2$

$a_2 = -\frac{1}{2}a_0,\ a_3 = -\frac{1}{6}a_1,\ a_4 = \frac{a_0}{24},\ a_5 = \frac{a_1}{120}$, etc.

Vi kan välja $a_1 = 0 \Rightarrow y = a_0 x^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \ldots\right) \rightarrow$

$\underline{y_1 = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \ldots}$ och $\underline{y_2 = x^{-1} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^3 - \ldots}$

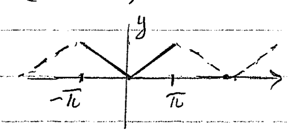
är linjärt oberoende lösningar.

---

3. Om $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ är en analytisk funktion, så uppfyller $u$ och $v$ Cauchy-Riemann ekvationer
$u_x = v_y$ och $u_y = -v_x$. För $u(x,y) = xy - x + y$
$u_x = y - 1$. Vi får $v_y = y - 1 \Rightarrow v(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - y + g(x)$
för någon funktion $g = g(x)$.
$u_y = -v_x \Rightarrow x + 1 = -g'(x) \quad \Rightarrow v(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - y - \frac{1}{2}x^2 - x\ (+C)$.
$\underline{f(z) = xy - x + y + i\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 - x - y\right)}$ är analytisk
för att $u_x = v_y$ och $u_y = -v_x$ och $\mathrm{Re}\, f(z) = u(x,y)$.
$\left(f(z) = -\frac{i}{2}z^2 - (1+i)z\right)$.

---

4. a) Fourierserien till $f(t) = |t|$ är $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$
där $a_0 = \pi$, $a_n = -\frac{2}{\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$
$a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $n = 1, 2, \ldots$
$b_n = 0$.




$|t| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t$.

Fourierserien konvergerar mot $|t|$ för alla $-\pi \leq t \leq \pi$.

För $t = 0 \quad 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Också $\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}}$

b) Enligt Parsevals identitet

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2\,dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}.$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\Rightarrow \underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}}{\frac{8}{\pi^2}} = \underline{\underline{\frac{\pi^4}{96}}}$$

5. Transformering av ekvationen $u_t = u_{xx}$ ger

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_s(\omega,t) = (\widehat{u_{xx}})_s(\omega,t) = \omega\, u(0,t) - \omega^2 \hat{u}_s(\omega,t) \qquad t>0.$$

$$= -\omega^2 \hat{u}_s(\omega,t) \quad \text{eftersom } u(0,t)=0.$$

Differentialekvationen har lösningen $\hat{u}_s(\omega,t) = C(\omega)e^{-\omega^2 t}$

där konstanten $C(\omega)$ beror på $\omega$.

Begynnelsevillkoret $u(x,0)=e^{-x}$ blir transformerad

$$\hat{u}_s(\omega,0) = \frac{\omega}{1+\omega^2}. \Rightarrow C(\omega) = \hat{u}_s(\omega,0) = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$\hat{u}_s(\omega,t) = \frac{\omega}{1+\omega^2}e^{-\omega^2 t}$$

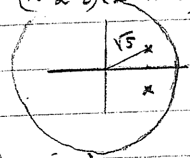
Eftersom $u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{u}_s(\omega,t)\sin\omega x\, d\omega$ enligt inversionsformeln, är

$$\underline{\underline{g(\omega,t) = \frac{2}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}e^{-\omega^2 t}}} \qquad \omega>0,\ t>0.$$

6. Nollställen till nämnaren $z^2-4z+5$ är $2\pm i$.

Dessa är enkla poler till funktionen $f(z) = \dfrac{\sin(z-2)}{(z-2-i)(z-2+i)}$.

Polerna ligger innanför cirkeln $|z|=\pi$.



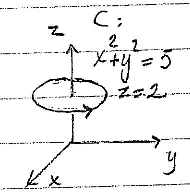

$$\operatorname*{Resid}_{z=2+i} f(z) = \frac{\sin i}{2i}$$

$$\operatorname*{Resid}_{z=2-i} f(z) = \frac{\sin(-i)}{-2i} = \frac{\sin i}{2i} \qquad (\sin(-z) = -\sin z)$$

Enligt Residysatsen är $\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{\sin i}{2i} + \frac{\sin i}{2i}\right)$

$$= 2\pi \sin i = 2\pi \frac{1}{2i}(e^{-1}-e) = \underline{\underline{\left(e-\frac{1}{e}\right)\pi i}}$$

7. Enligt Stoke's sats




$$J = \iint_S \nabla\times F\cdot n\,dS = \oint_C F\cdot dr \quad \text{där } C \text{ är randen}$$

till ytan S, n är enhetsnormal som pekar uppåt, C är orienterad som i bilden. Ytan S kan bytas mot cirkelskivan $S': x^2+y^2 \le 5,\ z=2$. Normalen är då k.

$$\nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ 3y & -2xz & x^2-y^2 \end{vmatrix} = (-2y+2x)i - 2xj + (-2z-3)k$$

$$J = \iint_{S'}(-2z-3)\,dS = -7\iint_{S'} dS = -7\cdot \text{arean av } S'$$

$$= \underline{\underline{-35\pi}}$$