Lösningar till Tentamen den 25/5 2005
Matematik påbyggnadskurs 5B1304

1. Låt $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ där $a_0 \neq 0$. Då är

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}.$$

Vi sätter in summorna i ekvationen $x^2 y'' + x^2 y' + xy' - y = 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r+1}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Den andra summan blir med variabelbytet $n = k-1$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} (k+r-1) x^{k+r}$. Vi tar ut termerna som innehåller x^r $(n=0)$:

$$(a_0 r(r-1) + a_0 r - a_0) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n (n+r)(n+r-1) + a_{n-1}(n+r-1) +$$
$$a_n (n+r) - a_n\big) x^{n+r} = 0. \text{ Vi får}$$

$$a_0 (r^2 - 1) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n (n+r+1) + a_{n-1}\big)(n+r-1) x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \underset{\neq 0}{a_0}(r^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow r = \pm 1.$$

För $\underline{r=1}$ $\quad n + r - 1 = n \neq 0 \Rightarrow a_n(n+2) + a_{n-1} = 0$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n+2} \quad n \geq 1 \qquad a_1 = -\frac{a_0}{3}, \quad a_2 = \frac{a_0}{4 \cdot 3}, \ldots$$

$$y = x\left(a_0 - \frac{a_0}{3}x + \frac{a_0}{12}x^2 + \ldots\right) = a_0\left(x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{12} - \ldots\right)$$

För $\underline{r=-1}$ $\quad n + r - 1 = n - 2 \neq 0$ om $n \neq 2$.

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} \text{ för } n = 1, n = 3, \ldots \qquad a_1 = -a_0, \; a_3 = -\frac{a_2}{3}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{12}, \ldots \qquad y = x^{-1}\left(a_0 - a_0 x - \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_2}{12}x^4 - \ldots\right)$$

För $a_2 = 0$ $\quad y = a_0 x^{-1}(1 - x)$

Svar: $y_1 = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{12} - \cdots$ och $y_2 = \frac{1}{x} - 1$ är linjärt oberoende lösningar.

(Lösningen $y_1 = \frac{2}{x}(e^{-x} + x - 1)$)

2. a) Insättning $y = x^r$ i ekvationen $x^2y'' + xy' + cy = 0$ medför att $x^r(r(r-1) + r + c) = 0$ $\quad r^2 + c = 0$

1) Om $c < 0$, $r = \pm\sqrt{-c}$.

Den allmänna lösningen är $y = C_1 x^{\sqrt{-c}} + C_2 x^{-\sqrt{-c}}$

2) Om $c = 0$, $r = 0$ $\quad y = C_1 + C_2 \ln x$

3) Om $c > 0$, $r = \pm\sqrt{c}\, i$ $\quad (x^{\sqrt{c}\,i} = e^{\sqrt{c}\ln x\, i})$

$y = C_1 \cos(\sqrt{c}\ln x) + C_2 \sin(\sqrt{c}\ln x)$

b) Ekvationen $(xy')' + \lambda x^{-1} y = 0$ kan skrivas $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$.

1) För $\lambda < 0$, låt $\alpha = \sqrt{-\lambda}$. Enligt a)

$y = C_1 x^{\alpha} + C_2 x^{-\alpha}$ Randvillkoren $y(1) = y(e) = 0$ är uppfyllda om $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \end{cases}$ $\quad C_2 = -C_1 \Rightarrow C_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0$

$e^{2\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow y \equiv 0$

~~2) För $\lambda = 0$~~

~~$y = C_1 + C_2 \ln x$~~, $\begin{cases} y(1) = C_1 = 0 \\ y(e) = C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y \equiv 0$

3) För $\lambda > 0$, Låt $\beta = \sqrt{\lambda}$. Lösningen

$y = C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)$ uppfyller villkoren $y(1) = y(e) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 \cos 0 = 0 \\ C_1 \cos\beta + C_2 \sin\beta = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} C_1 = 0 \\ C_2 \sin\beta = 0 \end{matrix} \Rightarrow \beta = n\pi$

Egenvärden: $\lambda_n = \beta_n^2 = \underline{n^2\pi^2}$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

Egenfunktioner: $y_n = C_n \underline{\sin(n\pi \ln x)}$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

3. Låt $g(t) = \frac{1}{t^2+1}$. Ekvationen kan då skrivas

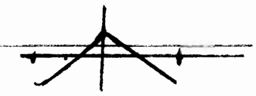
$(f*g)(x) = \frac{1}{x^2+4}$ för alla x $\quad \left(f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt = g*f(x) \right)$.

Genom att Fouriertransformera ekvationen får vi

$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|}$ och $\hat{g}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$.

$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$ $\quad \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2+1}}}$

4. Fourierserien på $[-2,2]$ till en jämn funktion är $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2}$. I serien för $f(x) = 1 - x$, $0 \le x \le 2$, $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}$



Enligt Parseval's identitet

$$\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} (f(x))^2\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Eftersom f är jämn $\text{vl} = \frac{1}{2}\int_0^2 (1-x)^2\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{96}}}$$

5, a) Eftersom Laplacetransformen av $u_t(x,t)$ är $s\mathcal{F}(x,s) - u(x,0) = s\mathcal{F}(x,s) - 1$, får vi

$s\mathcal{F}(x,s) - 1 + x\,\mathcal{F}_x(x,s) = \frac{x}{s}$ och vidare

$xs\,\mathcal{F}_x(x,s) + s^2\mathcal{F}(x,s) = s + x$ för $s > 0$ (om Laplacetransformen för u och u_t existerar)

b) Ekvationen kan skrivas

$\mathcal{F}_x + \frac{s}{x}\mathcal{F} = \frac{1}{s} + \frac{1}{x}$. En integrerande faktor är $e^{\int \frac{s}{x}dx} = e^{s\ln x} = x^s$ (för $x > 0$).

Genom att multiplicera ekvationen med x^s får vi

$\frac{\partial}{\partial x}(x^s\mathcal{F}) = \frac{x^s}{s} + x^{s-1}$ som medför att

$$x^s\mathcal{F} = \int\left(\frac{x^s}{s} + x^{s-1}\right)dx = \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} + \frac{x^s}{s} + C(s).$$

Vi får att $\mathcal{F}(x,s) = \frac{x}{s(s+1)} + \frac{1}{s} + \frac{C(s)}{x^s}$

För att $\mathcal{F}$ skall vara definierad för alla x, måste $C(s) = 0$.

$$\Rightarrow \mathcal{F}(x,s) = \frac{x}{s(s+1)} + \frac{1}{s}$$

$\mathcal{F}$ är Laplacetransformen av

$$\underline{\underline{u(x,t) = (1 - e^{-t})x + 1}}$$

6. Funktionen $f(z) = \dfrac{\log(z+2)}{z^2+4}$ har två singulära punkter: $z = \pm 2i$.
Punkten $z = 2i$ ligger innanför cirkeln $|z-2i| = 1$. Den är en enkel pol för att $\log(2i+2) = \log 2\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} \neq 0$. Enligt Residusatsen är

$$\int_{|z-2i|=1} f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}_{2i} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{\log(z+2)}{z+2i}$$

$$= 2\pi i \frac{\log(2+2i)}{4i} = \frac{\pi}{2}\left(\log 2\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}\log 2 + i\frac{\pi^2}{8}}}$$

7. Ytan skär xy-planet längs cirkeln $C: x^2+y^2 = 3$.
Enligt Stoke's sats

$$\iint_S (\nabla\times F)\cdot n\,dS = \int_C F\cdot dr = \int_C (z-2y)\,dx + (x+z)\,dy + (x-2y)\,dz.$$

C genomlöps i positiv riktning. Vi använder param. framställning $x = \sqrt{3}\cos t$, $y = \sqrt{3}\sin t$, $z = 0$.

$$\iint_S \nabla\times F\cdot n\,dS = \int_0^{2\pi} \left(-2\sqrt{3}\sin t\,(-\sqrt{3}\sin t) + \sqrt{3}\cos t\,(\sqrt{3}\cos t)\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (6\sin^2 t + 3\cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} (3\sin^2 t + 3)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}(1-\cos 2t) + 3\right)dt$$

$$= \underline{\underline{9\pi}}$$