Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Matematik påbyggnadskurs 5B1304

Lördagen den 14 januari 2006, kl 14.00-19.00

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 11, 15 och 19 poäng.
Tillåtet hjälpmedel är “Beta, Mathematics handbook”.

. . . .

1. Bestäm den allmänna lösningen till Euler-Cauchy-ekvationen

$$x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2 \qquad x > 0.$$

(3p)

2. Sök två linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen

$$xy'' + 2y' + xy = 0, \qquad x > 0.$$

För lösningar i serieform ange minst tre termer (som $\neq 0$.)
(Ledning: Sök lösningar $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.) (3p)

3. Om det finns en analytisk funktion $f(z), z = x + iy$ sådan att funktionen $u(x, y) = xy - x + y$ är dess realdel, bestäm en sådan funktion. (3p)

4. a) Hitta Fourierserien till funktionen $f(t) = |t|, \quad -\pi < t < \pi$ (se Beta) och använd serien för att beräkna summan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

b) Använd Fourierserien i a) och Parseval's identitet för att beräkna summan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

(3p)

v.g. vänd

5. Randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < \infty \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x}, & 0 < x < \infty \end{cases}$$

har en lösning på formen $u(x,t) = \int_0^\infty g(v,t) \sin vx \, dv$. Bestäm g med hjälp av Fouriersinustransformen.
(Ledning: Man kan anta att u och u_x går mot 0 när $x \to \infty$ och att u och derivatorna u_t, u_x och u_{xx} är absolut integrerbara. Fouriersinustransformen av u är $\widehat{u}_s(\omega,t) = \int_0^\infty u(x,t) \sin \omega x \, dx$ och $\widehat{(u_t)}_s = \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}_s$.) (4p)

6. Beräkna integralen

$$\oint_C \frac{\sin(z-2)}{z^2 - 4z + 5} \, dz$$

där C är cirkeln $|z| = \pi$ genomlöpt ett varv i positiv riktning. Uttryck svaret på formen $a + ib$, där a och b är reella tal. (3p)

7. Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = (3y, -2xz, x^2 - y^2)$. Randen till en yta S är kurvan $x^2 + y^2 = 5,\ z = 2$. Beräkna flödet $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F} \cdot n) \, dS$ uppåt genom ytan S (n är en enhetsnormal till ytan). (3p)

Några formler: Fouriersinustransformen av en funktion h är $\widehat{h}_s(\omega) = \int_0^\infty h(x) \sin \omega x \, dx$, fouriercosinustransformen är $\widehat{h}_c(\omega) = \int_0^\infty h(x) \cos \omega x \, dx \quad \omega > 0$.
Vidare gäller $\widehat{h''}_s(\omega) = \omega h(0) - \omega^2 \widehat{h}_s(\omega)$ för $\omega > 0$.