Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Matematik påbyggnadskurs 5B1304

Onsdagen den 25 maj 2005, kl 8.00-13.00.

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 11, 15 och 19 poäng.
Tillåtet hjälpmedel är "Beta, Mathematics handbook".

....

1. Bestäm två linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen

$$x^2y'' + (x^2 + x)y' - y = 0, \quad x > 0.$$

För lösningar i serieform ange minst tre termer.
(Ledning: Sök lösningar $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.) (3p)

2. a) Bestäm den allmänna lösningen till Euler-Cauchy-ekvationen

$$x^2y'' + xy' + cy = 0, \quad x > 0$$

för olika värden av c (c är en reell konstant).
b) Bestäm alla reella egenvärden och egenvektorer till Sturm-Liouvilleproblemet
$(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0, \qquad y(1) = y(e) = 0, \quad 1 \leq x \leq e.$ (4p)

3. Bestäm funktionen f som uppfyller ekvationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + 1}\, dt = \frac{1}{x^2 + 4}$$

för alla reella tal x.
(Ledning: Fouriertransformera ekvationen.) (2p)

v.g. vänd

4. Beräkna summan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ genom att använda ekvationen

$$1 - x = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad 0 \le x \le 2$$

och Parseval's identitet. (3p)

5. Antag att funktionen $u(x,t)$ uppfyller differentialekvationen $u_t + xu_x = x$ och begynnelsevillkoret $u(x,0) = 1, \quad t \ge 0, -\infty < x < \infty.$

a) Visa att Laplacetransformen $F(x,s)$ av $u(x,t)$ (med avseende på t, $F(x,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,t) dt$) uppfyller ekvationen $xsF_x + s^2 F = s + x$, för $s > 0$.

b) Bestäm Laplacetransformen F och funktionen u. (4p)

6. Beräkna integralen

$$\oint_C \frac{\log(z+2)}{z^2+4}\, dz,$$

där C är cirkeln $|z - 2i| = 1$ genomlöpt en gång i positiv riktning och logaritmen är principalgrenen av logaritmen. (3p)

7. Beräkna integralen $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot n\, dS$, där S är ytan av den del av paraboloiden $z = 3 - x^2 - y^2$ som är ovanför planet $z = 0$, n är dess utåtriktade enhetsnormal och

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (z - 2y, x + z, x - 2y).$$

(3p)

Anm: Beta innehåller bland annat avsnitt om
Differentialekvationer av andra ordningen
Sturm-Liouvilleproblem
Komplex integration.