Kontrollskrivning, Matematik påbyggnadskurs 5B1304
Tisdagen den 26 april 2005, kl 10.15-11.15

Tillåtet hjälpmedel: Beta. För godkänt krävs minst 5 poäng.

1. a) Bestäm konstanten a så att funktionen $h(x,y) = x^2 + 3x + ay^2 + 2y$ är harmonisk.
b) Låt $z = x + iy$. Funktionen f är analytisk i hela komplexa planet. Realdelen $\mathrm{Re} f(z) = h(x,y)$ och $f(0) = 0$. Bestäm f. (4p)

2. Ekvationen $y'' - y = 0$ har potensserielösningar $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.
a) Ange en ekvation mellan koefficienterna a_n, a_{n+1} och a_{n+2} för varje n.
b) Bestäm koefficienterna a_0, a_1, a_2, a_3 och a_4 för den lösning y som uppfyller $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (4p)

Lösningar till Kontrollskrivningen, Matematik påpyggnadsskurs den 26 pril 2005

1. a) Villkoret för att h skulle vara harmonisk är att $h_{xx} + h_{yy} = 0$. Eftersom $h_x = 2x + 3, h_y = 2ay + 2, h_{xx} = 2, h_{yy} = 2a$, följer det att h är harmonisk precis då $\underline{a = -1}$.

b) Låt $\mathrm{Im} f(z) = g(x, y)$. Då är $f(z) = h(x, y) + ig(x, y)$. Ett nödvändigt villkor för att f skulle vara analytisk är att h och g uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer $h_x = g_y$ och $h_y = -g_x$, dvs. (1) $2x + 3 = g_y$ och (2) $-2y + 2 = -g_x$. Från (1) följer att $g(x, y) = 2xy + 3y + \phi(x)$ för någon funktion $\phi = \phi(x)$. Genom att använda ekvation (2) följer att $\phi'(x) = -2$ och vidare att $\phi(x) = -2x + C$ där C är en konstant. Vi får att $g(x, y) = 2xy + 3y - 2x + C$. Eftersom h och g uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer och de har kontinuerliga partiella derivator, är funktionen $f(z) = x^2 + 3x - y^2 + 2y + i(2xy + 3y - 2x + C)$ analytisk. Villkoret $f(0) = 0$ är uppfyllt om $iC = 0$. Svar: $\underline{f(z) = z^2 + (3 - 2i)z}$.

2. a) Vi deriverar serien $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$: $y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$, $y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$. Genom att byta summeringsindex $k = n + 2$, $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1) a_{n+2} x^n$. Insättning i ekvationen medför att $\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n)x^n = 0$. Alla koefficienter måste vara $= 0$. För varje $n = 0, 1, 2, ...$ $\underline{a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}}$.

b) Villkoret $y(0) = 1$ medför att $y(0) = a_0 = 1$. Från $y' = a_1 + 2a_2 x + ...$ följer $y'(0) = a_1 = 0$. Med hjälp av formeln i a) får vi att $a_2 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{a_1}{32} = 0$, etc. Koefficienterna är $\underline{a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{24}}$.