Matematiska institutionen
KTH

Lösningar till tentamensskrivningen på kursen Diskret matematik för F3F1 den 16 maj 2006.

1. (a) Antalet sätt att placera sju personer i en kö är $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040$.

   (b) Antalet sätt att dela in 10 personer i tre ettiketerrade lag med vardera tre och tre respektive fyra personer är

$$\binom{10}{3,3,4} = \frac{10!}{3!3!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 4200.$$

   (c) Antalet sätt att dela in en mängd med 5 olika element i två icketomma delmängder är

$$S(5,2) = S(4,1) + 2S(4,2), \qquad S(4,2) = S(3,1) + 2S(3,2)$$
$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 = 3.$$

   Alltså $S(5,2) = 1 + 2(1+6) = 15$

2. Den karaktersitiska ekvationen $r^2 = r + 6$ har rötterna $r = -2$ och $r = 3$. Varje lösning till den givna rekursionsekvationen kan alltså skrivas

$$a_n = A(-2)^n + B3^n,$$

   för några tal A och B. Då $a_0 = 1$ och $a_1 = 2$ får vi att $A+B = 1$ och $-2A+3B = 2$. Härur får vi att $B = 4/5$ och $A = 1/5$. Således

   Svar:
$$a_n = \frac{1}{5}(-2)^n + \frac{4}{5}3^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

3. Låt e beteckna antalet kanter, v antalet noder och r antalet områden. Då gäller

$$32 = 2e = \sum_{v_i \in V} \delta(v_i) = v \cdot 4.$$

   Alltså är $v = 8$. Eulers formel
$$v + r = e + 2$$
   ger nu att $r = e + 2 - v = 16 + 2 - 8 = 10$.

   Svar: Antal områden är 10.

4. (a) Varje led består av fem personer.

   op 1. Bestäm plats för A_1 i det led han skall stå i: $n_1 = 5$
   op 2. Bestäm plats åt A_2 i det led han skall stå i: $n_2 = 5$.
   op 3. Placera nu ut de övriga 13 på de övriga 13 platserna: $n_3 = 13!$

   Multiplikationsprincipen ger nu
   Svar: $13! \cdot 5 \cdot 5$.

(b) Fall 1, av fyra ekvivalenta fall, är att A_3 står framför A_1.

op 1. Bestäm plats för A_3A_1 i det led de skall stå i: $n_1 = 4$
op 2. Bestäm plats åt A_2 i det led han skall stå i: $n_2 = 5$.
op 3. Placera nu ut de övriga 12 på de resterande 12 platserna: $n_3 = 12!$

Multiplikationsprincipen ger nu att antalet möjligheter i fall 1 är $12! \cdot 4 \cdot 5$. Lika många möjligheter i alla de fyra fallen ger nu svaret
Svar: $4 \cdot 12! \cdot 4 \cdot 5$.

5. Då $671 = 11 \cdot 61$ vet vi att $Z_{671} \approx Z_{11} \times Z_{61}$. Vid denna isomorfi gäller att elementet 1 svarar mot elementet $(1, 1)$. Ett ekvivalent problem är alltså att i ringen $Z_{11} \times Z_{61}$ bestämma de element (x_1, x_2) sådana att
$$(x_1^{240}, x_2^{240}) = (1, 1).$$
Fermats sats ger nu att alla $x_1 \neq 0$ i Z_{11} löser ekvationen $x_1^{240} = 1$ och samtliga $x_2 \neq 0$ i Z_{61} löser ekvationen $x_1^{240} = 1$. Alltså finns totalt $10 \cdot 60 = 600$ lösningar till den givna ekvationen.
Varje x sådant att $x \not\equiv 0 \pmod{n_i}$, för $n_i \in \{11, 61\}$, ger en lösning, tex $x = 2$.

6. Antag att $g_1, h_1 \in G_1$ och $g_2, h_2 \in G_2$. Då gäller
$$g_1 + g_2 = h_1 + h_2 \quad \Rightarrow \quad G_1 \ni g_1 - h_1 = h_2 - g_2 \in G_2.$$
Eftersom det enda gemensamma elementet i G_1 och G_2 är identitetselementet 0, så har vi
$$g_1 - h_1 = 0 = h_2 - g_2.$$
Härav sluter vi att om ett element kan skrivas som en summa av ett element i G_1 och ett element i G_2 så finns bara en möjlighet till detta.
Det finns nu totalt $\mid G_1 \mid \cdot \mid G_2 \mid = \mid G \mid$ olika möjligheter att skriva element unikt som summor av element i G_1 och G_2, dvs samtliga element i G kan skrivas unikt som en summa av element i G_1 och G_2.

7. Till varje linjär kod C av längd 8 hör en kontrollmatris H så att
$$\bar{c} \in C \quad \Leftrightarrow \quad H\bar{c}^T = 0.$$
Om H har r linjärt oberoende rader blir antalet ord i C
$$\mid C \mid = 2^{8-r}.$$
Raderna i H är ortogonala mot orden i C. Om H saknar en nollkolonn blir garanterat mninimiavståndet två. Antalet rader r kan inte vara ett eftersom raden med enbart ettor 11111111 inte är ortogonal mot ordet 11100000. Alltså måste $r \geq 2$. Men matrisen
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
uppfyller alla krav.
Vi beskriver en kod som uppfyller kraven med hjälp av matrisen ovan. Den har $2^{8-2} = 64$ stycken ord.

8. Dert givna polynomet är ej irreducibelt. Elementet $z = 2$ är en rot och därmed kan polynomet faktoriseras

$$z^3 - z^2 + 1 = (z - 2)(z^2 + z + 2).$$

Eftersom polynomet $z^2 + z + 2$ är av grad 2 och saknar nollställen i Z_5, är det irreducibelt i $Z_5[z]$. Vi bildar nu kroppen F genom

$$F = \{a + bx \mid a, b \in Z_5\},$$

och där vi räknar som om $x^2 + x + 2 = 0$. I denna kropp gäller att x är ett nollställe till $z^2 + z + 2$ och därmed även till det givna polynomet. Enligt faktorsatsen, gäller då i denna kropp att

$$z^2 + z + 2 = (z - x)(z - \alpha)$$

för något element $\alpha \in F$. Detta element α är också ett nollställe till givna polynomet. Den ovan beskrivna kroppen innehåller alltså alla rötter till det givna polynomet.