

Matematiska Institutionen
KTH

Rättade lösningar till tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik för F3 och F1spec, 5B1203, måndagen den 24 maj 2004.

1. Vi tillämpar metoden med snabb aritmetik. Ringen Z_{78} är isomorf med den direkta produkten $Z_2 \times Z_3 \times Z_{13}$. Om avbildningen φ beskriver denna isomorfi gäller att $\varphi(58) = (0, 1, 6)$ och därmed

$$\varphi(58^{299}) = (0^{299}, 1^{299}, 6^{299}) = (0, 1, 6^{300-1}).$$

Enligt Fermats lilla sats gäller i ringen Z_{13} att $6^{12} = 1$. Då $6^{-1} = 11$ i ringen Z_{13} finner vi att

$$\varphi(58^{299}) = (0, 1, 6^{25 \cdot 12} 6^{-1}) = (0, 1, 11).$$

Vi använder nu kinesiska restsatsen för att bestämma det element x i Z_{78} sådant att $\varphi(x) = (0, 1, 11)$. Enligt lösningsformeln för kinesiska restsatsen gäller att

$$x = a \cdot 3 \cdot 13 + b \cdot 2 \cdot 13 + c \cdot 2 \cdot 3 + n \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

för några tal a, b, c och n . Att $x \equiv_2 0$ ger att $a = 0$. Villkoret $x \equiv_3 1$ ger att $b(-1)1 \equiv_3 1$ varur $b = -1$ är en av flera lösningar. Då $x \equiv_{13} -2$ så $c \cdot 2 \cdot 3 \equiv_{13} -2$ varur $c = 4$ är helt ok. Alltså $x = -26 + 24 + n \cdot 78$.

Svar: 76.

2. Vi använder metoden med inklusion exklusion. Låt A, B och C vara mängden av tal mellan 1 och 1000 som har 6, 7 respektive 8 som delare. Det tal n vi söker ges av

$$n = 1000 - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|.$$

Eftersom vart sjätte tal är delbart med sex så $|A| = 166$. Vidare finner vi att $|B| = 142$, $|C| = 125$, $|A \cap B| = 23$, $|A \cap C| = 41$, $|B \cap C| = 17$ och $|A \cap B \cap C| = 5$.

Svar: $1000 - (166 + 142 + 125) + (23 + 41 + 17) - 5 = 643$.

3. a) Matrisen har tre linjärt oberoende rader och koden har längden sex. Antalet ord blir då

$$|C| = 2^{6-3} = 8.$$

b) Koden C består av de ord c sådana att

$$Hc^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

För det givna ordet v gäller att

$$Hv^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Denna kolonnmatrix är inte nollkolonnen och alltså ligger inte ordet v i koden. Om ordet v hade legat på avståndet ett från något kodord skulle Hv^T vara lika med någon av matrisen $H : s$

kolonner. Så är inte fallet. Beteckna kolonnerna ett till sex med respektive e_1, e_2, \dots, e_6 . Kolonnen Hv^T kan skrivas som summan av två kolonner på flera olika sätt:

$$Hv^T = e_2 + e_5 = e_1 + e_6 = e_3 + e_4.$$

Då gäller

$$H(v + 010010)^T = H(v + 100001)^T = H(v + 001100)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger att orden $v + 010010 = 101010$, $v + 001100 = 110100$ och $v + 100001 = 011001$ ligger i koden och har avståndet två till v .

c) Om det finnes ett sådant ord c_0 skulle orden i mängden $C \cup (c_0 + C)$ alla ha ett inbördes avstånd på minst tre, ty om $c, c' \in C$ så $d(c_0 + c, c') = d(c_0, c' - c) = d(c_0, c'') \geq 3$, där även $c'' = c - c' \in C$ eftersom C är linjär. Sfärer med radien ett runt kodord skulle då vara disjunkta. Eftersom varje sfär innehåller sju ord och så om antalet kodord vore 16 skulle det finnas minst $7 \cdot 16 = 112$ olika ord. Det finns dock bara 64 olika ord av längd sex. Alltså finns inget ord som ligger på avståndet tre från alla ord i koden

4. Rekursionsekvationens karakteristiska ekvation

$$r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0$$

har rötterna $r = \pm 1, -2$. En allmän lösning kan då skrivas

$$a_n = A(+1)^n + B(-1)^n + C(-2)^n.$$

Begynnelsevärdesvillkoren ger då att $A + B + C = 0$, $A - B - 2C = 1$ och $A + B + 4C = 2$. Detta linjära ekvationssystem för A , B och C har lösningen $C = 2/3$, $A = 5/6$ och $B = -3/2$.

Svar: $a_n = \frac{5}{6} - \frac{3}{2}(-1)^n + \frac{2}{3}(-2)^n.$

5. Betrakta först en allmän cyklisk grupp $C_6 = \langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = id\}$ med sex element. Den genereras av elementet a som har ordning sex. Men observera att den också genereras av elementet a^5 . Inga andra element i C_6 har ordning sex.

Varje element i S_6 av ordning sex genererar en cyklisk delgrupp med sex element. Av observationen ovan ser vi att vi har att beräkna antalet element i S_6 av ordning sex. Totala antalet cykliska delgrupper med sex element blir då detta antal m delat med två, dvs $m/2$.

Varje permutation φ kan skrivas som en produkt av disjunkta cykler

$$\varphi = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k.$$

Om cykellängderna hos $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ är m_1, m_2, \dots, m_k gäller att ordningen hos permutationen φ är minsta gemensamma multiplen till m_1, m_2, \dots och m_k .

Den slutsats vi kan dra är att om φ har ordning sex så antingen är φ en produkt av en 2-cykel och en 3-cykel eller är φ en 6-cykel.

Antalet olika 6-cykler σ i S_6 är 5!. Antalet olika produkter av en 2-cykel och en 3-cykel är

$$\binom{6}{2} \binom{4}{3} \cdot 2 = 15 \cdot 4 \cdot 2 = 120.$$

Svar: $\frac{1}{2}(5! + 120) = 120.$

6. Vi delar in i olika fall: *Fall i*, för $i = 0, 1, \dots, k$, är att precis i av elementen i mängden $\{1, 2, \dots, k\}$ blir ensamma i var och en av sina delmängder. Antalet möjligheter i *fall i* är

$$\binom{k}{i} S(n-k, m-i)(m-i)(m-i-1) \dots (m-k+1),$$

ty först väljer vi ut de i stycken element som ligger ensamma i sina delmängder, sedan delar vi in de $n - k$ elementen i mängden $\{k + 1, k + 2, \dots, n\}$ i $m - i$ stycken icke-tomma delmängder. När detta är gjort ligger de $m - i$ delmängderna där och de återstående $k - i$ elementen placeras ut i dessa delmängder (högst en i varje).

Eftersom de olika delfallen är disjunkta får vi delsvaret

$$H(k, m, n) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} S(n - k, m - i)(m - i)(m - i - 1) \dots (m - k + 1).$$

Vi använder nu formeln ovan för att bestämma talet $H(2, 4, 7)$.

$$\begin{aligned} H(2, 4, 7) &= \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} S(7 - 2, 4 - i)(4 - i)(4 - i - 1) \dots (4 - 2 + 1) = \\ &= \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} S(5, 4 - i)(4 - i)(4 - i - 1) \dots 3 = S(5, 4)4 \cdot 3 + 2S(5, 3)3 + S(5, 2). \end{aligned}$$

För Stirlingtalen ovan gäller att $S(5, 4)$ är antal sätt att välja ut en delmängd med två element till en mängd med 5 element, dvs 10, att

$$S(5, 3) = S(4, 2) + 3S(4, 3) = S(3, 1) + 2S(3, 2) + 3 \cdot 6 = 1 + 2 \cdot 3 + 18 = 25,$$

och $S(5, 2) = S(4, 1) + 2S(4, 2) = 15$. Alltså

$$\text{Svar: } 120 + 2 \cdot 75 + 15 = 285.$$

7. En rot är elementet z eftersom för z gäller att $z^3 - z + 1 = 0$. Eftersom faktorsatsen gäller i polynomringen $F[x]$, emedan F är en kropp, söker vi dela det givna polynomet med faktorn $(x - z)$:

$$x^3 - x + 1 = (x - z)(Ax^2 + Bx + C).$$

Vi får direkt att $A = 1$, samt att $-Cz = 1$, $-Bz + C = -1$ och $-z + B = 0$. Så $B = z$ och $C = -z^{-1}$. Övriga rötter till ekvationen är då rötter till ekvationen

$$x^2 + zx - \frac{1}{z} = 0.$$

Kvadratkomplettering ger, då $z/2 = 2z$, följande:

$$(x + 2z)^2 - (2z)^2 - \frac{1}{z} = 0,$$

som förenklas till

$$(x + 2z)^2 = \frac{z^3 + 1}{z}.$$

Eftersom $z^3 - z + 1 = 0$ så har vi att $z^3 + 1 = z$ så ekvationen ovan reduceras till

$$(x + 2z)^2 = 1.$$

Alltså $x = -2z \pm 1$. Eftersom $-2 = 1$ har vi rötterna

$$\text{Svar: } x = z, z + 1 \text{ och } z + 2.$$

8. Antag att grafen G inte är sammanhängande utan att nodmängden kan delas upp i två delmängder V_1 och V_2 sådana att mellan noderna i V_1 och noderna i V_2 finns inga kanter. I komplementgrafen \overline{G} finns då mellan varje nod i V_1 och varje nod i V_2 en kant. Vi visar nu att \overline{G} är sammanhängande. Låt u och v vara två godtyckliga noder. Vi skall visa att det finns en stig i \overline{G} mellan u och v . Om $u \in V_1$ och $v \in V_2$ (eller vice versa) finns en kant mellan u och v , se ovan. Om både u och v tillhör V_1 tar vi en nod $v_2 \in V_2$ och använder kanterna mellan u och v_2 och v_2 för att bilda en stig. Pss om $u, v \in V_2$.

Alltså är \overline{G} sammanhängande, men enligt förutsättningarna i uppgiften är G och \overline{G} isomorfa grafer. Alltså kan antagandet att G inte är sammanhängande inte vara sant.