Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Algebra och kombinatorik för F3, 5B1302, onsdagen den 23 augusti 2000 klockan 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden.

Tillåtna hjälpmedel: INGA HJÄLPMEDEL ÄR TILLÅTNA.

Gränser: 10 poäng ger betyget tre, 14 poäng ger betyget fyra och 18 poäng ger betyget fem.

Lösningarna måste, såvida inget annat anges, motiveras utförligt.

PROBLEM:

1. (2p) Ange samtliga heltal x och y som satisfierar systemet

$$3x + 4y \equiv 8 \pmod{12}$$
$$4x + 9y \equiv 7 \pmod{12}.$$

2. Låt ϕ beteckna Eulers ϕ-funktion.
a) (1p) Beräkna $\phi(143)$.
b) (2p) Bestäm samtliga heltal x sådana att $10^{3723} \equiv x \pmod{143}$.

3. a) (1p) Bestäm antalet ord i den linjära kod C vars kontroll matris (parity-check matrice), är lika med

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) (1p) Visa att ordet $\mathbf{c}$=111100 inte tillhör koden C.
c) (2p) Bestäm kontrollmatrisen till en linjär kod C' som har samma ordlängd och samma antal ord som koden C men som innehåller ordet $\mathbf{c}$ ovan.

4. (3p) Med hjälp av siffrorna 0, 1, 6, 8 och 9 bildar man 7-siffriga tal. Två sådana tal säges vara vertikalt ekvivalenta om de övergår i varandra när pappret vrides 180 grader, t ex så är 0016891 vertikalt ekvivalent med ordet 1689100. Hur många vertikalt inekvivalenta ord finns det?

5. (3p) Bestäm antalet surjektioner av mängden $A = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ på mängden $B = \{1, 2, 3, ..., 8\}$ som är sådana att elementen 1, 2, 3 och 4 avbildas på fyra olika element i B.

6. Låt F_{25} beteckna den ändliga kropp 25 element som man på sedvanligt sätt kan konstruera med hjälp av ett irreducibelt andragradspolynom $p(x)$. Vi väljer $p(x) = x^2 + x + 1$.

a) (1p) Bestäm ett element z i F_{25} sådant att $(3x + 2)z = x$.

b) (2p) Det finns två element z i F_{25} som satisfierar ekvationen $z^2 - 2xz + 4x + 3 = 0$. Bestäm dessa två element.

7. Låt $Z(G)$ beteckna de element i en grupp G som kommuterar med varje annat element i G, dvs

$$Z(G) = \{g \in G \mid ag = ag \text{ för alla } a \in G\}.$$

Låt S_n beteckna mängden av alla permutationer på en mängd med n stycken element.

a) (1p) Bestäm $Z(S_2)$ och $Z(S_3)$.

b) (2p) Bestäm $Z(S_n)$ för $n \geq 4$.

8. (3p) Visa att varje planär graf med högst 29 kanter är 4-färgbar.

Anm. Den år 1976 av Appel och Haken visade 4-färgssatsen får inte användas vid lösningen av ovanstående problem.