Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar till den 21 mars 2006 för Diskret matematik F3 F1spec, andra versionen.

1. Det går att fylla i nedanstående tabell så att den blir multiplikationstabellen till en grupp. Gör detta.

$\circ$	a	b	c	d	f	g
a	a	b	c	d		g
b	b		g	f	d	c
c	c	f	a	g	b	
d			f		c	b
f		c	d		g	a
g	g	d			a	f

   (a) Är gruppen abelsk.
   (b) Bestäm inverser till alla element.
   (c) Bestäm ordningen av alla element.
   (d) Beräkna $b \circ c \circ d \circ f \circ g$.

2. Visa att följande tabell inte är någon multiplikationstabell till en grupp:

$\circ$	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	a	b	1	d	c
b	b	c	d	a	1
c	c	d	a	1	b
d	d	1	c	b	a

3. Visa att nedanstående tabell aldrig kan fyllas i så att det blir multiplikationstabellen till en grupp.

$\circ$	a	b	c	d	f	g	h	k	i
a	a								
b		a							
c									
d									
f									
g									
h									
k									
i									

4. Betrakta $G = (Z_8, +)$. Bestäm fyra olika delgrupper till G, (Obs hela gruppen räknas också formellt som en delgrupp till gruppen G). Bestäm också samtliga sidoklasser till alla de fyra delgrupper till G som du fann.

5. De inverterbara elementen i Z_{14} bildar en grupp under operationen multiplikation. Undersök om denna grupp är cyklisk.

6. Gruppen $(Z_{23} \setminus \{0\}, \cdot)$ är cyklisk. Bestäm en generator till denna grupp.
7. Låt $\sigma(x)$ beteckna ordningen av ett element x i en grupp G. Visa att för varje element a i en grupp gäller att $\sigma(a) = \sigma(a^{-1})$.
8. Givet en grupp G. Visa att för varje par av element x och y i G gäller att x och yxy^{-1} har samma ordning.
9. Den inverterbara elementen i Z_{64} bildar en grupp G. Visa att varje element $g \in G$ satisfierar $g^{32} = 1$.
10. En direkt produkt av två grupper G_1 och G_2 med operationerna $\circ_1$ resp $\circ_2$ definieras som gruppen $(G_1 \times G_2, \circ)$ där
$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, \quad g_2 \in G_2\} \quad \text{och} \quad (g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 \circ_1 h_1, g_2 \circ_2 h_2).$$
Den direkta produkten av två grupper är alltid en grupp.
Visa att gruppen $(Z_2, +) \times (Z_3, +)$ är isomorf med gruppen $(Z_6, +)$, men att gruppen $(Z_3, +) \times (Z_3, +)$ inte är isomorf med gruppen $(Z_9, +)$.
11. Bestäm en delgrupp med åtta element till gruppen $(Z_4, +) \times (Z_4, +)$.
12. Lå G vara en cyklisk grupp med n element och låt g vara en generator till G:
$$G =< g >= \{g, g^2, g^3, \dots, g^n = e\}.$$
   (a) Visa att om $d \mid n$, dvs $n = kd$ för något heltal k, så gäller att elementet $h = g^d$ genererar en delgrupp H till G med k element.
   (b) Visa att om $sgd(a, n) = 1$, dvs talen a och n är relativt prima, så gäller att elementet $f = g^a$ genererar G.
13. En given grupp G har delgrupper H och K med 39 respektive 40 element. Vilket är det minsta antal m element G kan ha. Konstruera också en grupp G med m element som har delgrupper med 39 resp 40 element.
14. Visa att om $ab = e$ så gäller att $ba = e$.
15. Visa att om $(ab)^2 = a^2b^2$ så gäller att $ab = ba$.
16. Givet är en grupp med identitetselement e. Visa att om $a^2 = e$ för alla element a i G så är G en abelsk grupp.
17. Visa att om H och K är delgrupper till en grupp G så är också $H \cap K$ en delgrupp till G.
18. Visa att om H och K delgrupper till G och $sgd(|H|, |K|) = 1$ så gäller att $H \cap G = \{e\}$.