Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar till den 14 februari 2006 för Diskret matematik F3 F1spec.

1. Visa att om N är en uppräknelig mängd så är också $N \times N$ en uppräknelig mängd.
2. Visa att om mängderna A_1, A_2, ..., A_k, ... är en uppräknelig samling uppräkneliga mängder så utgör också mängden av element i unionen av dessa mängder en uppräknelig mängd.
3. Visa att mängden av alla ändliga delmängder till de naturliga talen utgör en uppräknelig mängd.
4. Visa att de komplexa talen och de reella talen har samma kardinalitet.
5. Visa att hur man än väljer 101 tal bland talen $1, 2, 3, \ldots, 200$ så finnas alltid två tal bland dessa 101 sådana att det ett av de två talen delar det andra talet.
6. Visa att om fem punkter väljs på måfå i en liksidig triangel med sidan ett så kommer minst två av punkterna att ha ett inbördes avstånd på högst 0.5.
7. Visa att om sju hela tal väljs på måfå, så kommer det finns två tal bland dessa sju tal sådana att antingen är deras summa eller deras differens delbar med 10.
8. Fyra pojkar och fem flickor från en klass med 12 flickor och 13 pojkar skola ställa sig på ett led. Hur många möjliga led finns.
9. Under gymnastiken skall sju av de 13 pojkarna ställa sig på ett led och mellan pojkarna skall placeras 12 bollar. På hur många olika sätt kan de se ut om dels bollarna ser olika ut respektive bollarna ser likadana ut respektive fem av de tolvbollarna är gröna, blå, röda, gula och svarta samt de övriga sju oskiljaktigt vita?
10. Ur en urna med vita bollar, röda bollar, gröna bollar och innehållande lappar med siffrorna 1, 2 och 3 drages objekt 12 gånger med återläggning.
    (a) Hur många olika dragsekvenser kan åstadkommas?
    (b) Hur många olika sampel kan erhållas?
11. Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationenerna
    (a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, om vi kräva $x_i \geq 0$ för $i = 1, 2, 3, 4$.
    (b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, om vi kräva $x_i \geq 1$ för $i = 1, 2, 3, 4$.
    (c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 20$, om vi kräva $x_i \geq 0$ för $i = 1, 2, 3, 4$.
12. Låt $\varphi = (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 6\ 7)$ och $\psi = (1\ 3\ 2)(4\ 5)(6\ 7)$. Bestäm en permutation x på mängden $\{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ sådan att
$$\varphi x \psi^{-1} = \psi^2.$$
13. Bestäm en permutation φ på mängden $\{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ som har ordning 10. Hur många olika möjligheter finns det att svara rätt på denna fråga?
14. Vilka är den största ordning en permutation på mängden $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ kan ha?

Och så vidare i all oändlighet....