Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Algebra och kombinatorik för F3, 5B1302, 25 maj 2001 klockan 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

Tillåtna hjälpmedel: INGA HJÄLPMEDEL ÄR TILLÅTNA.

Gränser: 10 poäng ger betyget tre, 14 poäng ger betyget fyra och 18 poäng ger betyget fem.

Lösningarna måste, såvida inget annat anges, motiveras utförligt.

PROBLEM:

1. (3p) Man klipper sönder ordet ALGEBRA så att man får sju separata bokstäver. Dessa sammansätts sedan till ord bestående av tre bokstäver, t ex ALG, GBR, AAR etc. Hur många olika ord kan man bilda?

2. Låt C vara en linjär kod med kontrollmatrisen (= check matrix)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1p) Ange, med motivering, kodens minimiavstånd och antal ord koden innehåller.
b) (1p) Vilka av följande tre ord tillhör C: 1111111, 1111110 och 1111100. (Motivering krävs.)
c) (2p) Bestäm kontrollmatrisen för en kod C' som innehåller koden C och de tre orden i uppgift b) (och givetvis en hel del andra ord) men som inte innehåller ordet 1111000. Finns det någon sådan kod C' som är 1-felsrättande?

3. (3p) Bestäm antalet ickenegativa heltalslösningar till systemet

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 23$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 12.$$

4. (2p) Undersök om det finns hela tal s, t och r sådana att

$$s \cdot 1365 + t \cdot 1295 + r \cdot 1512 = 7.$$

Om talen s, t och r existerar så skall de bestämmas.

5. (3p) Använd tekniken med genererande funktioner för att lösa följande system av rekursionsekvationer:

$$\begin{aligned}
&a_{n+1} = -2a_n - 4b_n\ , \qquad n > 0,\\
&b_{n+1} = 4a_n + 6b_n\ , \qquad n > 0,\\
&a_0 = 1, \qquad b_0 = 0.
\end{aligned}$$

6. (3p) Betrakta mängden R av alla funktioner av ringen Z_6 på sig själv. Med operationerna

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) \qquad \text{och} \qquad (fg)(n) = f(n)g(n) \qquad n \in Z_6$$

utgör R en ring. (Detta behöver du inte visa!)
a) (1p) Visa att mängden $I = \{f \in R \mid f(0) = 0\}$ är ett ideal i R.
b) (1p) Bestäm antalet element i ringen R/I.
c) (1p) Är I ett maximalideal? (Svaret skall motiveras.)

7. (3p) Låt F beteckna den kropp med 25 element som erhålles när man räknar med elementen i mängden $\{ax + b \mid a, b \in Z_5\}$ som om $x^2 + 2 = 0$.
Bestäm, för samtliga värden på det naturliga talet n, antalet lösningar i kroppen F till ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
y + \ \ xz &= 0\\
x^2 y + x^n z &= 0\ .
\end{aligned}$$

8. (3p) Visa att för varje planär graf G gäller att $\chi(G) \leq 6$.
Anm. $\chi(G)$ betecknar det kromatiska talet. Ett bevis som stöder sig på fyrfärgssatsen ger inga poäng, men man får två extra poäng om man lyckas visa att $\chi(G) \leq 5$.