Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Algebra och Kombinatorik för F3, 5B1302, måndagen den 26 maj 2003 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

Tillåtna hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna.

Betygsgränser: 10 poäng ger betyget 3, 14 poäng ger betyget 4 och 18 poäng ger betyget 5.

1. (2p) Bestäm samtliga hela tal x sådana att

$$3x \equiv 2 \pmod 5$$
$$5x \equiv 3 \pmod 7$$
$$7x \equiv 4 \pmod 9.$$

2. a) (1p) Undersök om det finns någon transversal till mängderna

$$\{a,b,c\}, \quad \{a,b,d\}, \quad \{c,a,d\}, \quad \{b,a\}, \quad \{b\}, \quad \{d,c,b\}.$$

b) (2p) Hur många element måste minst läggas till någon eller några av mängderna för att det skall finnas en transversal till mängderna.

3. (2p) Bestäm koefficienten för x^{38} i polynomet

$$(1+2x^3-x^5)^{10}.$$

4. a) (2p) De binära felrättande koderna C och C' har checkmatriserna

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad H' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Undersök om det finns något ord som tillhör både C och C'.

b) (2p) Undersök om det finns något ord av längd sex som varken ligger på avståndet 1 eller 0 från något av orden i de bägge koderna ovan.

5. (3p) Sju män och sex kvinnor, fem hundar och fyra katter skall placeras i en kö så att någonstans mellan varje par av kvinnor finns en man, och så att inga hundar står precis bredvid varandra och inga katter står precis bredvid varanda. Dessutom får ingen hund stå bredvid någon katt. På hur många sätt kan ett led med dessa varelser ordnas.

6. (3p) Låt a_n beteckna antalet olika $(n-3)$-reguljära grafer som man kan rita med n stycken noder. Bestäm den genererande funktionen för talföljdern $a_3, a_4, a_5, \ldots$.

Anmärkning Givetvis räknas isomorfa grafer som identiska grafer.

7. (3p) Låt G, K och H vara cykliska grupper. Utred under vilka förutsättningar den direkta produkten $G \times H \times K$ är cyklisk respektive inte är cyklisk.

8. (4p) Bestäm antalet invertibla element i kvotringen

$$Z_2[x]/ < (x+1)^n >,$$

där n är ett naturligt tal.

Anmärkning Delpoäng ges enligt följande: 1p för fallet $n = 3$, 2p om fallen $n = 3, 4, 5$ behandlas korrekt.