Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Algebra och kombinatorik för F3, 5B1302, 23 maj 2002, klockan 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

Tillåtna hjälpmedel: INGA HJÄLPMEDEL ÄR TILLÅTNA.
Gränser: 10 poäng ger betyget tre, 14 poäng ger betyget fyra och 18 poäng ger betyget fem.
Lösningarna måste, såvida inget annat anges, motiveras utförligt.

PROBLEM:

1. (3p) Bestäm en formel för antalet sätt att fördela r olika bollar i n olika lådor så att precis k lådor blir tomma.

2. (3p) Låt G beteckna en graf utan multipla kanter och loopar. Låt $\delta(x)$ beteckna valensen hos noden x. Antag att G har n stycken noder. Visa att om $\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$ för varje par av noder x och y så är grafen sammanhängande.

3. (3p) Bestäm, för varje naturligt tal $n \geq 2$, antalet lösningar i Z_n till de bägge ekvationssystemen

a) $2x + 3y = 0$, $3x + 5y = 0$,

b) $2x + 3y = 0$, $3x + 6y = 0$.

4. (3p) Bestäm antalet 20-siffriga ternära följder i alfabetet $\{0, 1, 2\}$ sådana att ingen etta uppträder någonstans till höger om en tvåa.
Anm. 012202 är ett exempel på en ternär följd av längd 6 i vilken ingen etta uppträder till höger om en tvåa. I följden 002201 uppträder en etta till höger om en tvåa.

5. (3p) Betrakta en grupp G och en delgrupp H till G. Produkten av två vänster sidoklasser aH och bH till G definierar vi som mängden

$$aHbH = \{ahbk \mid h, k \in H\}.$$

Visa att om produkten av varje par av två vänster sidoklasser till H i G är en vänster sidoklass till H i G, så är H en normal delgrupp till G.

6. Låt K beteckna kroppen $Z_2[x]/ < x^3 + x + 1 >$ och betrakta polynomringen $K[z]$.
a) (1p) Visa att polynomet $z^2 + z + 1$ är irreducibelt i $K[z]$.
b) (1p) Visat att ovanstående polynom inte är primitivt i $K[z]$.
c) (2p) Undersök om det finns ett primitivt 2:a-gradspolynom i $K[z]$. Om sådana primitiva polynom finns skall minst ett anges.

7. (3p) Till en danskväll har n pojkar och n flickor inbjudits. Varje pojke kan tänka sig bjuda upp precis m stycken flickor och till varje flicka finns precis m stycken pojkar som kan tänka sig bjuda upp just den flickan.

Totalt skall det dansas precis m stycken danser och i varje dans skall alla pojkar och flickor vara med och dansa.

Visa att det finns minst ett sätt att arrangera danserna på så att ingen pojke dansar med en och samma flicka mer än en gång.

8. Vi betraktar felrättande binära koder av längd n, dvs delmängder till Z_2^n. (Här betecknar Z_2^n den direkta produkten av n kopior av Z_2.) Låt σ beteckna följande funktion från Z_2^n till Z_2:

$$\sigma((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

a) (2p) Visa att för varje perfekt ettfelsrättande kod C av längd $n = 2^k - 1$, där $k \geq 3$, och för varje funktion f från C till Z_2^n så är följande mängd en perfekt ettfelsrättande kod av längd $2n + 1$:

$$\{(x_1 + c_1, x_2 + c_2, \ldots, x_n + c_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, \sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(c_1, c_2, \ldots, c_n)) \mid$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Z_2^n, \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in C\}.$$

b) (2p) Bestäm en funktion f med $f((0, 0, \ldots, 0)) = 0$ sådan att den perfekta koden ovan, för varje linjär perfekt ettfelsrättande kod C, blir en perfekt ettfelsrättande kod som inte är linjär.

Lösningarna anslås på det så kallade nätet efter skrivtidens slut.