Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik för F3 och F1spec, 5B1203, måndagen den 24 maj 2004 klockan 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

Tillåtna hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna.

Betygsgränser: 10 poäng ger betyget 3, 14 poäng ger betyget 4 och 18 poäng ger betyget 5.

Problem: (Obs alla lösningar och svar skall motiveras noga.)

1. (3p) Beräkna 58^{299} i ringen Z_{78} .

2. (2p) Bestäm antalet hela tal mellan 1 och 1000 som inte är delbara med något av talen 6, 7 eller 8.

3. En linjär 1-felsrättande kod C har kontrollmatrisen

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

dvs H är kodens så kallade check-matris.
a) (1p) Bestäm totala antalet ord i koden C.
b) (1p) Visa att ordet $v = 111000$ varken tillhör koden eller ligger på avståndet ett från något kodord samt bestäm det eller de kodord som ligger närmast v.
c) (2p) Finns det något binärt ord v av längd sex som inte ligger i C men vars avstånd till alla ord i C är minst tre.

4. (2p) Lös rekursionsekvationen $a_n = -2a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3}$, $n = 3, 4, 5, \ldots$, där $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ och $a_2 = 2$.

5. (3p) Betrakta den symmetriska gruppen S_6, dvs den grupp som består av alla permutationer av en mängd med sex element. Bestäm totala antalet olika cykliska delgrupper H till S_6 sådana att $|H| = 6$.
(**Anm.** Två delgrupper till S_6 är identiska precis då de består av samma element från S_6.)

6. (4p) Ge en formel för antalet sätt $H(k, m, n)$ att dela in mängden $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ i m stycken icketomma delmängder så att elementen $1, 2, \ldots, k$ hamnar i olika delmängder. Vi förutsätter att $2 \leq k \leq m \leq n$.
Använd sedan din formel ovan för att bestämma talet $H(2, 4, 7)$.

7. (3p) Låt F vara den kropp med 27 element som man får med hjälp av kroppen Z_3 och det irreducibla polynomet $p(z) = z^3 - z + 1$. Kroppen F består alltså av elementen i mängden

$$F = \{a_o + a_1 z + a_2 z^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in Z_3\}$$

och man räknar som om $p(z) = 0$. Bestäm samtliga rötter i F till ekvationen $x^3 - x + 1 = 0$.

8. (3p) Låt G vara en graf utan multipla kanter och loopar. Med komplementet $\overline{G}$ till grafen G menar vi den graf som har samma nodmängd som grafen G och där vi har en kant mellan noderna v_i och v_j om och endast om en kant mellan dessa noder saknas i grafen G.

Visa att om G och $\overline{G}$ är isomorfa grafer så är G en sammanhängande graf.