

NÅGRA ORD OM APPENDICES

Bihangen har helt olika karaktär. Följande fyra bihang finns medtagna för fullständighets skull och är främst avsedda för de särskilt intresserade:

Appendix A

Appendix C

Appendix D

Appendix E

Däremot borde övriga appendices kunna intressera en vidare läsekrets.

Appendix B beskriver kortfattat Gibbs' fenomen, vilket torde höra till den matematiska allmänbildningen.

Appendix F är bara en omskrivning av avsnitt 2.3 för ett ortogonalt i stället för ett ortonormerat funktionssystem.

Appendix G illustrerar ett visst knep med fouriertransformen. Appendix F och G är speciellt användbara vid problemlösning.

Appendix H vill, i all enkelhet, förklara varför just operationen faltning dyker upp så ofta.

Uti appendix I återfinns bl a beräkningen av den fouriertransform, som spelar en nyckelroll vid beviset av Fouriers inversionssats.

APPENDIX A

Abels sats

För att slutföra beviset av sats 1.10 i avsnitt 1.9 måste vi bevisa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin nt}{n} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$$

då $r \rightarrow 1$, $r < 1$. Med Eulers formler får vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin nt}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2in} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{e^{int}}{2in} - \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{e^{-int}}{2in} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} r^m \frac{e^{imt}}{2im} + \sum_{m=-\infty}^{-1} r^{-m} \frac{e^{imt}}{2im} = \frac{1}{2i} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} r^{|m|} \frac{e^{imt}}{m} \end{aligned}$$

och

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{1}{2i} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{imt}}{m}.$$

Det räcker alltså att bevisa

Sats A.1. Serien $\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} e^{int}$ är konvergent för $0 < t < 2\pi$ och

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} r^{|n|} e^{int} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} e^{int}, \quad 0 < t < 2\pi. \quad (\text{A.1})$$

För beviset behöver vi följande två hjälpsatser, som först bevisades av Abel.

Sats A.2. Antag att $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en positiv avtagande talföljd, sådan att $a_n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$,

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \searrow 0,$$

och att $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en talföljd sådan att partialsummorna

$$S_N = \sum_{n=0}^N b_n$$

är likformigt begränsade, d v s $|S_N| \leq B$ för alla N . Då är $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

Sats A.3. (Abels sats.) Om $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är konvergent med summa S gäller att

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = S.$$

Vi behöver dessutom följande lemma.

Lemma 1. Fixera ett tal t , $0 < t < 2\pi$. Då är delsummorna $S_N = \sum_{n=1}^N e^{int}$ likformigt begränsade för alla N .

Bevis av Lemma 1. Enligt formeln för en geometrisk serie gäller

$$S_N = e^{it} \frac{e^{iNt} - 1}{e^{it} - 1}.$$

Detta ger uppskattningen

$$|S_N| \leq \frac{2}{|e^{it} - 1|} = \frac{1}{|\sin \frac{t}{2}|} < \infty.$$

Observera att begränsningen beror på t men inte på N . ■

Låt oss innan vi bevisar satserna A.2 och A.3 se hur de används för beviset av sats A.1.

Bevis av sats A.1. Vi delar upp påståendet (A.1) i två delar,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} e^{int} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{int}, \quad 0 < t < 2\pi, \quad (\text{A.2})$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{r^{-n}}{n} e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n} e^{int}, \quad 0 < t < 2\pi, \quad (\text{A.3})$$

där de båda högerleden är konvergenta. Påstående (A.3) följer av påstående (A.2) (ersätt t med $2\pi - t$), varför det räcker att bevisa

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{int} \text{ är konvergent,}$$

(ii)
$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} e^{int} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{int}.$$

Påstående (i) följer av sats A.2 med $a_n = 1/n \searrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ och $b_n = e^{int}$, vars partialsummor $S_N = \sum_{n=1}^N e^{int}$ är begränsade enligt lemma 1. Påstående (ii) följer nu av (i) och sats A.3. Påstående (A.3) är som tidigare nämnts en konsekvens av (A.2), och (A.1) följer slutligen genom att addera (A.2) och (A.3). ■

Det återstår nu endast att bevisa hjälpsatserna A.2 och A.3.

Bevis av sats A.2. Låt $M \leq N$ och bilda Cauchyavsnittet

$$\begin{aligned} \sum_{n=M}^N a_n b_n &= \sum_{n=M}^N a_n (S_n - S_{n-1}) \\ &= \sum_{m=M}^{N-1} (a_m - a_{m+1}) S_m + a_N S_N - a_M S_{M-1}. \end{aligned}$$

Villkoret $|S_m| \leq B$ för alla m ger uppskattningen

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=M}^N a_n b_n \right| &\leq \sum_{m=M}^{N-1} (a_m - a_{m+1})B + a_N B + a_M B \\ &= (a_M - a_N)B + a_N B + a_M B = 2a_M B \rightarrow 0 \end{aligned}$$

då M och $N \rightarrow \infty$. Påståendet följer nu av Cauchys konvergensprincip för serier, se t ex Leo Ullemar, *Funktioner av en variabel*, s 286. (Den använda metoden kallas partiell summation.) ■

Bevis av sats A.3. Vi kan utan inskränkning anta att $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$. (Om $A \neq 0$ ersätt a_0 med $a_0 - A$.) Sätt $t_n = \sum_{\nu=0}^n a_\nu$. Tag $\varepsilon > 0$ och välj N så stort att $|t_n| \leq \varepsilon$ för $n \geq N$. Skriv

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^N a_n r^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n.$$

Den andra summan kan uppskattas med partiell summation enligt följande:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{m=N+1}^{\infty} t_m (r^m - r^{m+1}) - t_N r^{N+1}.$$

Således är

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n \right| &\leq \sum_{m=N+1}^{\infty} |t_m| (r^m - r^{m+1}) + |t_N| r^{N+1} \\ &\leq \varepsilon \sum_{m=N+1}^{\infty} (r^m - r^{m+1}) + \varepsilon = \varepsilon r^{N+1} + \varepsilon \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

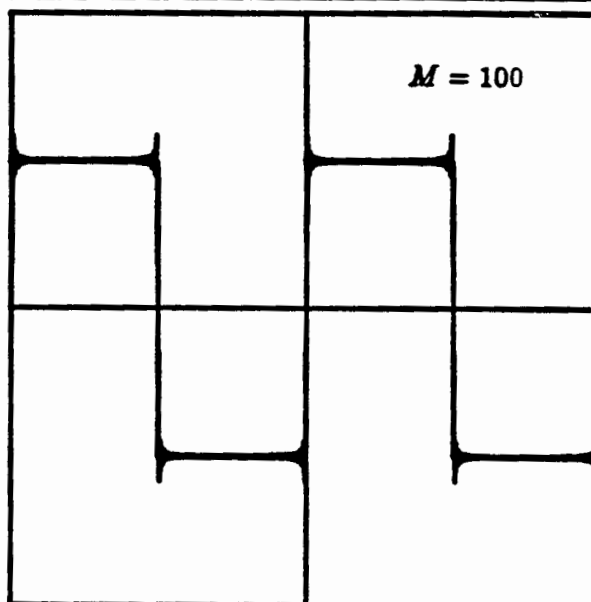
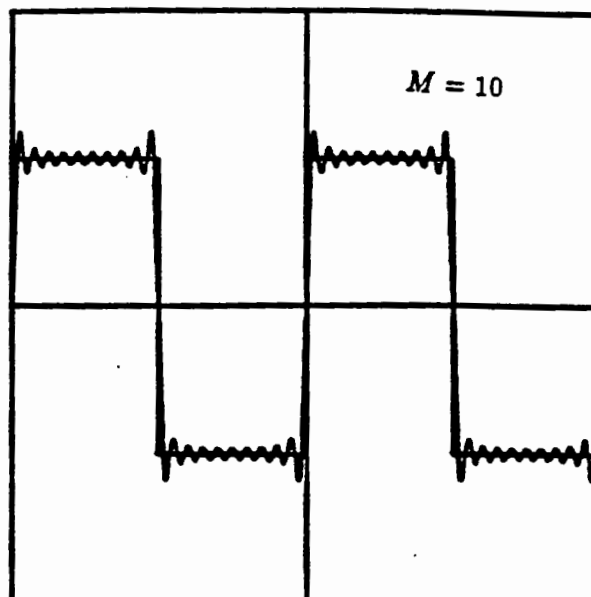
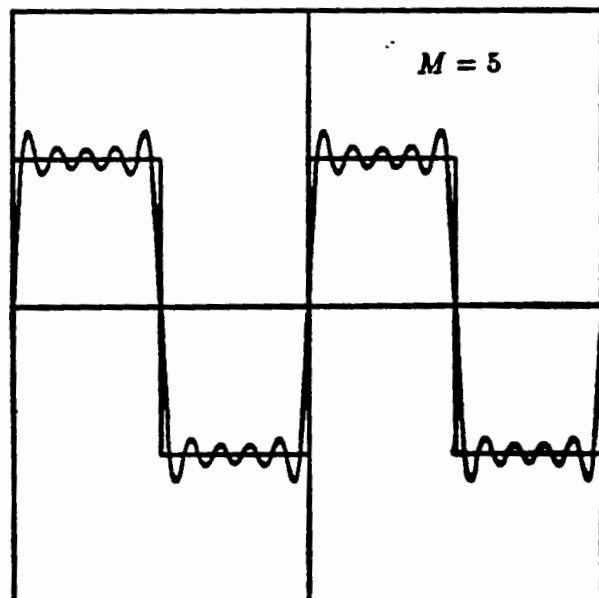
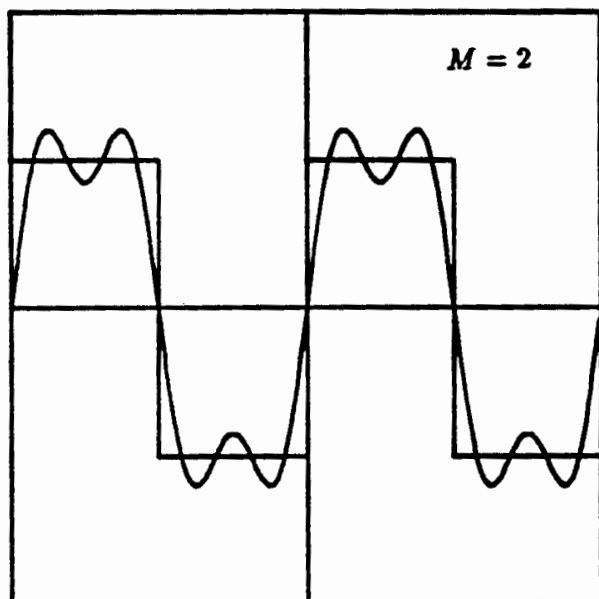
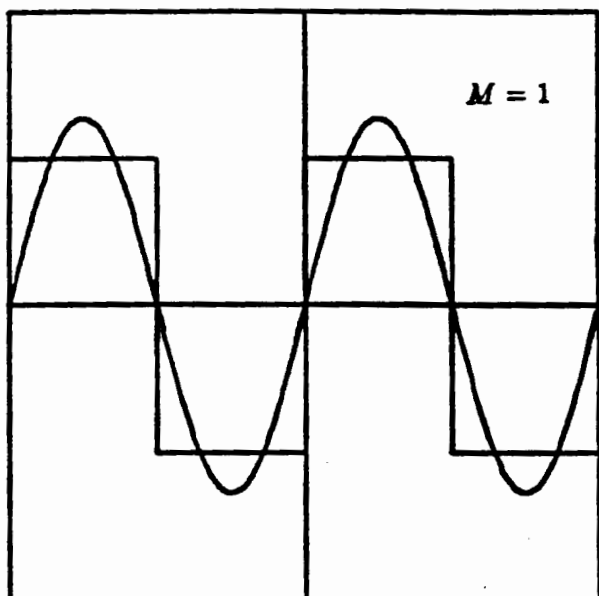
Vi får slutligen

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow 1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \right| &\leq \lim_{r \rightarrow 1} \left| \sum_{n=0}^N a_n r^n \right| + \limsup_{r \rightarrow 1} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^N a_n \right| + 2\varepsilon = |t_N| + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Eftersom ε var ett godtyckligt positivt tal måste

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = 0,$$

vilket slutför beviset. ■



Partialsummor S_N av fourierserien för fyrkantsvågen

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T/2 \\ -A, & -T/2 < t < 0, \end{cases}$$

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{för alla } t.$$

Observera att $N = 2M - 1$.

APPENDIX B

Gibbs' fenomen

(Detta avsnitt är delvis lånat från Franz Čech.) Fourierkoefficienterna till en diskontinuerlig men styckvis deriverbar, periodisk funktion avtar som $1/|n|$ då $n \rightarrow \infty$ (jfr sats 1.10 och 1.11). Fysikaliskt betyder detta att en sådan signal innehåller väsentliga bidrag från höga frekvenser. Dessa filtreras bort på ett oscilloskop p g a oscilloskopets ändliga bandbredd, så det vi ser av en sådan signal är i stor sett en partialsumma $S_N(t)$. För att få en ungefärlig uppfattning om hur en diskontinuerlig signal återges, studerar vi ett specialfall i en övningsuppgift.

Övning 22. Betrakta den T -periodiska fyrkantsvågen f , som ges av

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T/2, \\ -A, & -T/2 < t < 0. \end{cases}$$

a) Låt $N = 2M - 1$ vara ett *udda* heltal. Visa att fourierserien för f har delsummorna

$$S_N(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin(\Omega t) + \frac{\sin(3\Omega t)}{3} + \dots + \frac{\sin(N\Omega t)}{N} \right)$$

där $\Omega T = 2\pi$. Om vi låter datorn rita upp grafen för S_N över en hel period (för några N) får vi figuren på motstående sida.

b) Frågan är nu hur överslängen vid diskontinuiteten beter sig då vi låter N gå mot oändligheten. För den skull studerar vi maximi- och minimivärden av $S_N(t)$ genom att sätta derivatan $S'_N(t)$ lika med noll. Visa att

$$(i) S'_N(t) = \frac{2A\Omega}{\pi} \cdot \frac{\sin(N+1)\Omega t}{\sin \Omega t},$$

(ii) $S_N(t)$ har lokala maxima i punkterna

$$\tau_k = \frac{(2k-1)\pi}{(N+1)\Omega} \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

där $M = (N+1)/2$, och lokala minima i punkterna

$$\sigma_k = \frac{2k\pi}{(N+1)\Omega}, \quad k = 1, 2, \dots, M-1.$$

c) Eftersom vi vill veta vad som händer med $S_N(t)$ nära noll då $N \rightarrow \infty$, undersöker vi lämpligen det första maximat Y_N vid $\tau_1 = \pi/((N+1)\Omega)$. Visa att

$$\begin{aligned} Y_N = S_N \left(\frac{\pi}{(N+1)\Omega} \right) &= \frac{2A}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(N+1) \sin \left(\frac{x}{N+1} \right)} dx \\ &\approx \frac{2A}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \end{aligned}$$

där approximationen blir bättre ju större N är. Man ser att gränsvärdet av Y_N existerar:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Y_N = Y = \frac{2A}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{2A}{\pi} \text{Si}(\pi).$$

En taylorutveckling av $\sin x/x$ och därefter termvis integration leder till

$$\frac{2A}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx 1.18A,$$

vilket betyder att fourierserien gör en översläng på ungefär 18% vid diskontinuiteten eller 9% av språnget. Tillägg av ytterligare termer i delsumman påverkar inte detta faktum utan flyttar endast extrempunkten τ_1 närmare diskontinuitetspunkten origo.

APPENDIX C

Laurent Schwartz' sats

Sats 5.1. En linjär funktional f på \mathcal{F} är kontinuerlig (d v s tillhör \mathcal{F}') om och endast om det finns en konstant C och ett heltal $N \geq 0$ sådana att

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_N, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{F}, \quad (\text{C.1})$$

där

$$\|\varphi\|_N = \max_{\substack{0 \leq k \leq N \\ x \in \mathbb{R}}} (1 + |x|)^N |D^k \varphi(x)|.$$

Bevis. Antag att (C.1) gäller. Vi skall visa att $f \in \mathcal{F}'$. Låt $\varphi_n \rightarrow \varphi$ i \mathcal{F} . Då är $\{\varphi_n - \varphi\}_{n=1}^\infty$ en nollföljd i \mathcal{F} . Detta innebär enligt (5.3) att $\|\varphi_n - \varphi\|_N \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Men enligt (C.1) gäller att

$$|\langle f, \varphi_n - \varphi \rangle| \leq C \|\varphi_n - \varphi\|_N$$

varför

$$\langle f, \varphi_n - \varphi \rangle \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty,$$

d v s

$$\langle f, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle.$$

Alltså är funktionalen f kontinuerlig.

Antag nu omvänt att (C.1) inte gäller. Vi skall visa att f ej tillhör \mathcal{F}' . Vi antager alltså att det inte finns några tal C och N för vilka (C.1) gäller. Då måste det finnas testfunktioner φ_n , $n = 1, 2, \dots$ sådana att

$$|\langle f, \varphi_n \rangle| \geq n \|\varphi_n\|_n. \quad (\text{C.2})$$

Bilda nu

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n} \|\varphi_n\|_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Följden $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ är en nollföljd i \mathcal{F} ty om $n \geq m$ och $n \geq k$ gäller

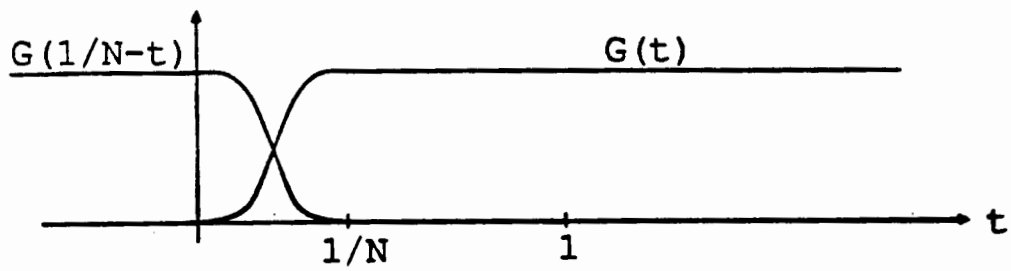
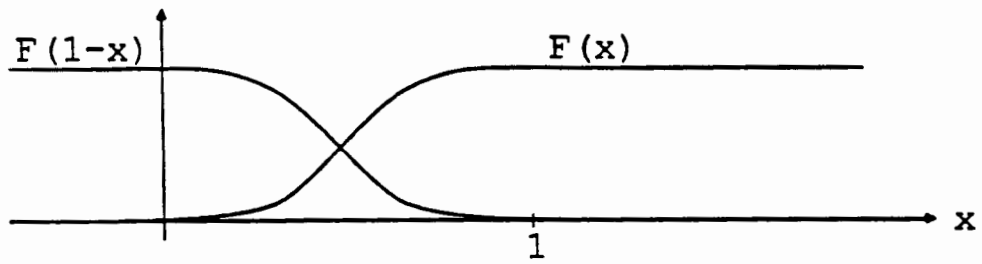
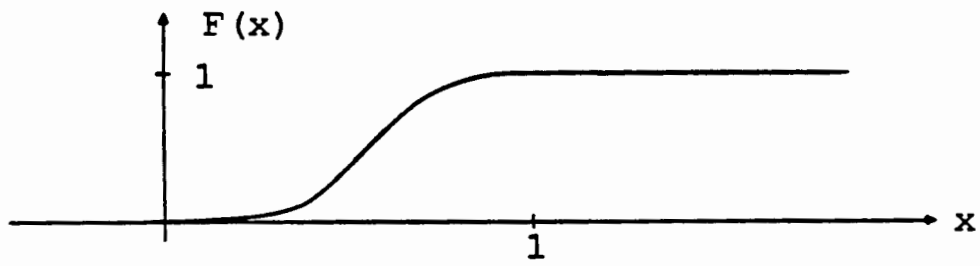
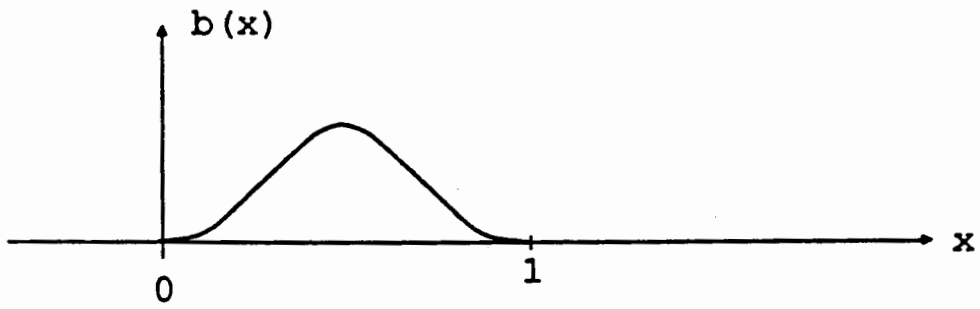
$$|x^m D^k \psi_n(x)| = \frac{|x^m D^k \varphi_n(x)|}{\sqrt{n} \|\varphi_n\|_n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Samtidigt gäller enligt (C.2) att

$$|\langle f, \psi_n \rangle| = \frac{|\langle f, \varphi_n \rangle|}{\sqrt{n} \|\varphi_n\|_n} \geq \sqrt{n}.$$

Vi har alltså bildat en nollföljd $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ för vilken $\langle f, \psi_n \rangle$ ej går mot noll. Det betyder att den linjära funktionalen f på \mathcal{F} ej är kontinuerlig. ■

Vi har tagit med ovanstående bevis eftersom sats 5.1 är av fundamental betydelse. I själva verket kan man ta (C.1) som utgångspunkt, när man skall definiera klassen \mathcal{F}' av tempererade distributioner. Ordet "tempererad" syftar nämligen på faktorn $(1 + |x|)^N$ i definitionen av $\|\varphi\|_N$. Sats 5.1 används bl a då man vill bevisa satserna 5.4, 5.9 a) och 5.21.



APPENDIX D

Skräddarsydda testfunktioner

Ofta behövs testfunktioner med speciella egenskaper. Vi skall här visa hur man kan gå tillväga. Definiera "bullen" (jfr figur å motstående sida)

$$b(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x(1-x)}\right), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$$

Man kan visa att b har kontinuerliga derivator av alla ordningar. Då är b en testfunktion med kompakt stöd. Låt B vara en primitiv funktion, definierad av

$$B(x) = \int_{-\infty}^x b(t) dt.$$

Den normerade funktionen

$$F(x) = \frac{B(x)}{B(1)}$$

har egenskaperna

$$F(x) \begin{cases} = 0, & x \leq 0 \\ = 1, & x \geq 1 \\ \text{växer,} & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Vidare gäller att

$$F(x) + F(1-x) = 1, \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R} \quad (\text{D.1})$$

Det är klart att (D.1) gäller om $x \leq 0$ eller $1 \leq x$. För resterande x kontrollerar vi helt enkelt derivatan

$$\frac{d}{dx} [F(x) + F(1-x)] = \frac{1}{B(1)} [B'(x) - B'(1-x)] = \frac{1}{B(1)} [b(x) - b(1-x)] = 0.$$

Om vi nu låter

$$G(t) = F(Nt)$$

så växer G från 0 till 1 på intervallet $0 \leq t \leq 1/N$. Vidare gäller

$$G(t) + G\left(\frac{1}{N} - t\right) = 1, \quad \text{för alla } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.2})$$

Det är klart att man m h a funktionen G kan bilda den funktion Ψ som skall uppfylla bl a (5.12) och (5.13) i avsnitt 5.8, liksom funktionen χ i appendix E.

APPENDIX E

Fouriertransform av distributioner med kompakt stöd

Vi skall här bevisa

Sats 5.21. Låt f vara en distribution med kompakt stöd. Då kan fouriertransformen \hat{f} beräknas med den vanliga formeln

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{E.1})$$

Till yttermera visso är \hat{f} en måttligt växande funktion.

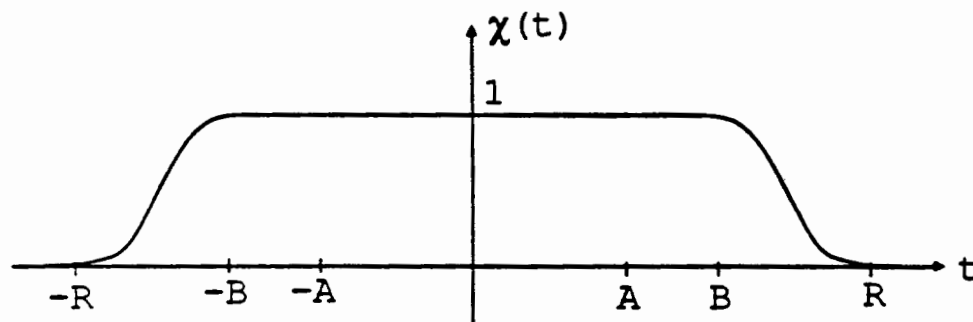
Anmärkning. Ytterligare information om \hat{f} återfinns i sats E.1 nedan.

Beviset är uppstyckat i fem steg.

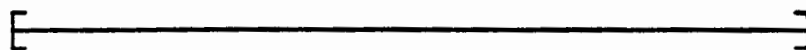
Steg 1. Låt stödet för f rymmas inom det begränsade intervallet $[-A, A]$. Om $A < B < R < \infty$ kan man konstruera en funktion χ (se figur) med egenskaperna

- $0 \leq \chi(t) \leq 1$ för alla $t \in \mathbb{R}$,
- $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, d v s χ har kontinuerliga derivator av alla ordningar,
- $\chi(t) = 0$ utanför intervallet $-R < t < R$, d v s stödet för χ ryms i intervallet $[-R, R]$,
- $\chi(t) = 1$ då $-B \leq t \leq B$.

För detaljerna i konstruktionen hänvisas till appendix D.



Här lever f .



Stödet för χ är $[-R, R]$.

Tillsammans innebär b) och c) att χ är en testfunktion i Schwartzklassen \mathcal{S} . Vi säger att vi maskerar f med χ och kallar χ en mask för f .

Steg 2. Distributionerna $f\chi$ och f borde vara lika.

Lemma.

$$f\chi = f \quad (\text{E.2})$$

Bevis av lemma. Vi måste visa att $\int f\chi\varphi dt = \int f\varphi dt$ för varje testfunktion φ . Vi beräknar skillnaden

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f\varphi dt - \int_{-\infty}^{\infty} f\chi\varphi dt &= \int_{-\infty}^{\infty} (f - f\chi)\varphi dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(1 - \chi)]\varphi dt \\ &= [1 - \chi \text{ är en måttligt växande funktion}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f[(1 - \chi)\varphi] dt = 0, \end{aligned}$$

eftersom testfunktionen $(1 - \chi)\varphi$ är identiskt lika med noll på en omgivning av stödet för f . ■

Steg 3. För varje fixt $\omega \in \mathbb{R}$ är produkten $\chi(t)e^{-i\omega t}$ en testfunktion med kompakt stöd, och på intervallet $-B \leq t \leq B$ sammanfaller den med funktionen $e^{-i\omega t}$. Låt

$$h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\chi(t)e^{-i\omega t}] dt. \quad (\text{E.3})$$

Lemma. Funktionen h är måttligt växande.

Bevis av lemma. Vi måste uppskatta $D^m h = \left(\frac{d}{d\omega}\right)^m h(\omega)$. Nu är

$$\begin{aligned} D^m h(\omega) &= \left(\frac{d}{d\omega}\right)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\chi(t)e^{-i\omega t}] dt \\ &= [f \text{ kontinuerlig linjär funktional på } \mathcal{S}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)^m [\chi(t)e^{-i\omega t}] dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\chi(t)(-it)^m e^{-i\omega t}] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(t) dt, \end{aligned}$$

där $\psi(t) = \chi(t)(-it)^m e^{-i\omega t}$. Nu ger sats 5.1 uppskattningen

$$|D^m h(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(t) dt \right| \leq C \|\psi\|_N.$$

Utanför intervallet $[-R, R]$ är $\psi(t) = 0$, varför

$$\begin{aligned} \|\psi\|_N &= \max_{\substack{0 \leq k \leq N \\ t \in \mathbb{R}}} (1 + |t|)^N |D^k \psi(t)| = \max_{\substack{0 \leq k \leq N \\ |t| \leq R}} (1 + |t|)^N |D^k \psi(t)| \\ &\leq \max_{\substack{0 \leq k \leq N \\ |t| \leq R}} (1 + R)^N |D^k \psi(t)|. \end{aligned}$$

Derivatan $D^k \psi(t)$ blir ett polynom av grad k i parametern ω , vars koefficienter är kontinuerliga, begränsade funktioner av t ,

$$D^k \psi(t) = a(t) + b(t)\omega + c(t)\omega^2 + \dots + g(t)\omega^k.$$

Detta medför existensen av en konstant A_k sådan att

$$|D^k \psi(t)| \leq A_k(1 + |\omega|)^k, \quad \text{för alla } t \in \mathbb{R}.$$

Sammantaget får vi

$$\begin{aligned} |D^m h(\omega)| &\leq C \|\psi\|_N \leq C(1+R)^N \max_{\substack{0 \leq k \leq N \\ t \in \mathbb{R}}} |D^k \psi(t)| \\ &\leq C(1+R)^N \max_{0 \leq k \leq N} A_k(1+|\omega|)^k \leq \text{const} \cdot (1+|\omega|)^N, \end{aligned}$$

vilket visar att h är måttligt växande. ■

Steg 4. Vi visar nu att distributionen \hat{f} kan identifieras med den måttligt växande funktionen h .

Lemma. I distributionsmening gäller att $\hat{f} = h$.

Bevis. Vi måste visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \varphi(y) dy$$

för alla testfunktioner φ . Det går till så här:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \varphi(y) dy &= [\text{definition av } \hat{f}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \hat{\varphi}(t) dt = [\text{enligt (E.2)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) \chi(t)] \hat{\varphi}(t) dt = [\chi \text{ måttligt växande funktion}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\chi(t) \hat{\varphi}(t)] dt = [\text{definition av } \hat{\varphi}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\chi(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-iyt} dy \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \chi(t) e^{-iyt} dy \right) dt \\ &= [\text{kan ersätta inre integralen med limes av en Riemansumma;} \\ &\quad f \text{ är kontinuerlig som linjär funktional}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \chi(t) e^{-iyt} dt \right) dy = [\text{definition av } h] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) h(y) dy, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Detta innebär att $\hat{f} = h$ i \mathcal{F}' . ■

Steg 5. Vi har visat att

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\chi(t)e^{-i\omega t}] dt. \quad (\text{E.4})$$

Men högerledet är *oberoende* av χ , så länge $\chi(t) = 1$ i en omgivning av stödet för f . Om vi låter B och R gå mot ∞ , kommer $\chi(t)$ att gå mot 1 för alla $t \in \mathbb{R}$, och (E.4) går över i (E.1). Strängt taget är formel (E.1) inkorrekt, eftersom $g(t) = e^{-i\omega t}$ ej är en testfunktion. Den stränga tolkningen av (E.1) är just (E.4). ■

Med samma maskineri som ovan (d v s χ och h) kan man bevisa följande

Sats E.1. Låt f vara en distribution med kompakt stöd. Då kan fouriertransformen \hat{f} analytiskt fortsättas till hela det komplexa talplanet medelst formeln

$$\hat{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-izt} dt. \quad (\text{E.5})$$

Taylorserien för \hat{f} , som konvergerar överallt, kan skrivas

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (\text{E.6})$$

där koefficienterna γ_k ges av

$$\gamma_k = \frac{(-i)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^k dt. \quad (\text{E.7})$$

APPENDIX F

Formler för ortogonalsystem

De flesta formler i avsnitt 2.3 gäller bara för ortonormerade funktionssystem $\{\varphi_n\}$. Nedan ges motsvarande formler för allmänna ortogonalsystem. Numreringen ansluter till den i avsnitt 2.3, med tillägg av ett prim.

Låt $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara ett ortogonalsystem i ett funktionsrum med inre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ och norm $\|\cdot\|$. Kan en godtycklig funktion f utvecklas i systemet $\{f_n\}$? Vi gör ansatsen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x). \quad (2.9')$$

Man finner att koefficienterna c_n bör väljas enligt

$$c_n = \frac{\langle f, f_n \rangle}{\langle f_n, f_n \rangle} = \frac{\langle f, f_n \rangle}{\|f_n\|^2}. \quad (2.10')$$

Under vissa villkor gäller sedan utvecklingen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, f_n \rangle}{\langle f_n, f_n \rangle} f_n(x).$$

Sats 2.4'. Låt V vara ett inreprodukttrum med vektorn f och ortogonalsystemet $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ givna. Uttrycket

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N c_n f_n \right\|^2$$

minimeras då

$$c_n = \frac{\langle f, f_n \rangle}{\langle f_n, f_n \rangle}.$$

Minimum är

$$\|f\|^2 - \sum_{n=1}^N \frac{|\langle f, f_n \rangle|^2}{\|f_n\|^2}. \quad (2.13')$$

Sats 2.5' (Bessels olikhet). Låt $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara ett ortogonalsystem. Då gäller för alla f att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle f, f_n \rangle|^2}{\|f_n\|^2} \leq \|f\|^2.$$

Sats 2.6' (Huvudsats för ortogonalsystem). Låt $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara ett ortogonalsystem i rummet $L_w^2(a, b)$. Då är följande egenskaper hos systemet $\{f_n\}$ ekvivalenta.

- (i) Delsummorna $\sum_{n=1}^N \frac{\langle f, f_n \rangle}{\langle f_n, f_n \rangle} f_n$ konvergerar mot f i kvadratisk medel m a p w , d v s

$$\left\| \sum_{n=1}^N \frac{\langle f, f_n \rangle}{\langle f_n, f_n \rangle} f_n - f \right\| \rightarrow 0 \quad \text{då } N \rightarrow \infty$$

för alla f i $L_w^2(a, b)$.

(ii) Parsevals relation 1 gäller för alla $f \in L_w^2(a, b)$,

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle f, f_n \rangle|^2}{\langle f_n, f_n \rangle}.$$

(iii) Parsevals relation 2 gäller för alla f och g i $L_w^2(a, b)$,

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, f_n \rangle \overline{\langle g, f_n \rangle}}{\langle f_n, f_n \rangle}.$$

(iv) Den enda funktion i $L_w^2(a, b)$ som är ortogonal mot alla f_n , $n \geq 1$, är nollfunktionen, d v s

$$\langle f, f_n \rangle = 0 \text{ för alla } n \implies f = 0.$$

Ett ortogonalsystem som besitter någon (och därmed alla) av de ekvivalenta egenskaperna (i)–(iv) kallas fullständigt. Man säger att systemet $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ spänner upp rummet $L_w^2(a, b)$.

APPENDIX G

Sidbyte i fouriertransformlexikon

Antag att man känner den ena av (de två funktionerna eller distributionerna) f och \hat{f} och vill beräkna den andra medelst tabell. Hur kan man utnyttja tabellen om man väl hittar den kända funktionen, men i fel tabell? Följande lilla schema ger svaret på frågan utan några integralformler.

Funktion (distribution)	Fouriertransform
$f(x)$ $g(x)$	$g(\omega) = \hat{f}(\omega)$ $2\pi f(-\omega)$
$f(x)$ $\frac{1}{2\pi} g(-x)$	$g(\omega)$ $f(\omega)$

Exempel.

$$\begin{array}{c} \delta(x) \\ 1 \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} 1 \\ 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \end{array}$$

Exempel.

$$\begin{array}{c} \operatorname{sgn} x \\ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{i(-x)} \right) = \frac{i}{\pi x} \\ \frac{1}{x} \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} \frac{2}{i\omega} \\ \operatorname{sgn} \omega \\ -i\pi \operatorname{sgn} \omega \end{array}$$

Exempel.

$$\begin{array}{c} \Pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} H(1+x)H(1-x) \\ 2 \operatorname{sinc} x \\ \frac{1}{\pi} \operatorname{sinc} x \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} 2 \operatorname{sinc} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2 \sin \omega}{\omega} \\ 2\pi\Pi(-\omega) = 2\pi\Pi(\omega) \\ \Pi(\omega) = \text{en frekvensmask} \end{array}$$

Exempel.

$$\begin{array}{c} e^{-|x|} \\ \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1+(-x)^2} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} \frac{2}{1+\omega^2} \\ e^{-|\omega|} \\ \pi e^{-|\omega|} \end{array}$$



Att utforska mikrokosmiska föremål är som att försöka lista ut vad som finns i ett mörkt rum utan att gå in och tända ljuset. Man måste ofta störa, till och med förstöra föremålet för att det ska sända ut signaler som kan avslöja hur det "ser ut". I Teknisk fysisk-utbildningen ingår flera kurser som bandlear om denna utforskning och dess resultat.


 φ

 $\varphi(0)$

 δ

APPENDIX H

Den allerstädes närvarande faltningen

Varför dyker faltningen upp så ofta (nästan som gubben ur lådan)? Låt oss se på ett enkelt exempel. Antag att vi har en "svart låda" (kanske en radioförstärkare i hemmet) som till varje insignal $f(t)$ svarar med en utsignal $g(t)$.

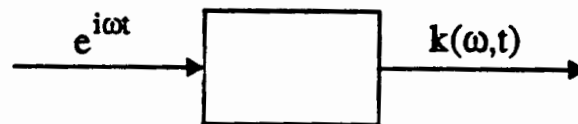


Låt oss antaga att systemet är

- a) translationsinvariant (tidsinvariant),
- b) linjärt,
- c) kontinuerligt.

Villkor a) betyder att den tidstranslaterade insignalen $f(t - t_0)$ skall ha $g(t - t_0)$ som utsignal.

Låt insignalen $f(t) = e^{i\omega t}$, där ω är en reell parameter, ha svaret $k(\omega, t)$.



Translatet $f(t - a)$ har då svaret $k(\omega, t - a)$. Men insignalen $f(t - a) = e^{i\omega(t-a)} = e^{-i\omega a} \cdot e^{i\omega t} = e^{-i\omega a} f(t)$ måste enligt b) ha utsignalen $e^{-i\omega a} k(\omega, t)$.



Alltså måste

$$k(\omega, t - a) \equiv e^{-i\omega a} k(\omega, t) \quad \text{för alla } \omega, a, t.$$

Valet $a = t$ ger $k(\omega, 0) = e^{-i\omega t} k(\omega, t)$, d v s

$$k(\omega, t) = e^{i\omega t} k(\omega, 0).$$

Funktionen $k(\omega, 0)$ kallas systemets *överföringsfunktion*. Vi antar att den kan skrivas som en fouriertransform av någon funktion $h(t)$,

$$k(\omega, 0) = \hat{h}(\omega).$$

När vi nu känner systemets svar på en komplex sinussvängning $e^{i\omega t}$ skall vi bygga upp en godtycklig signal $f(t)$ av sådana svängningar.

Steg 1. Insignalen $e^{i\omega t}$ har utsignal

$$k(\omega, t) = \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}.$$

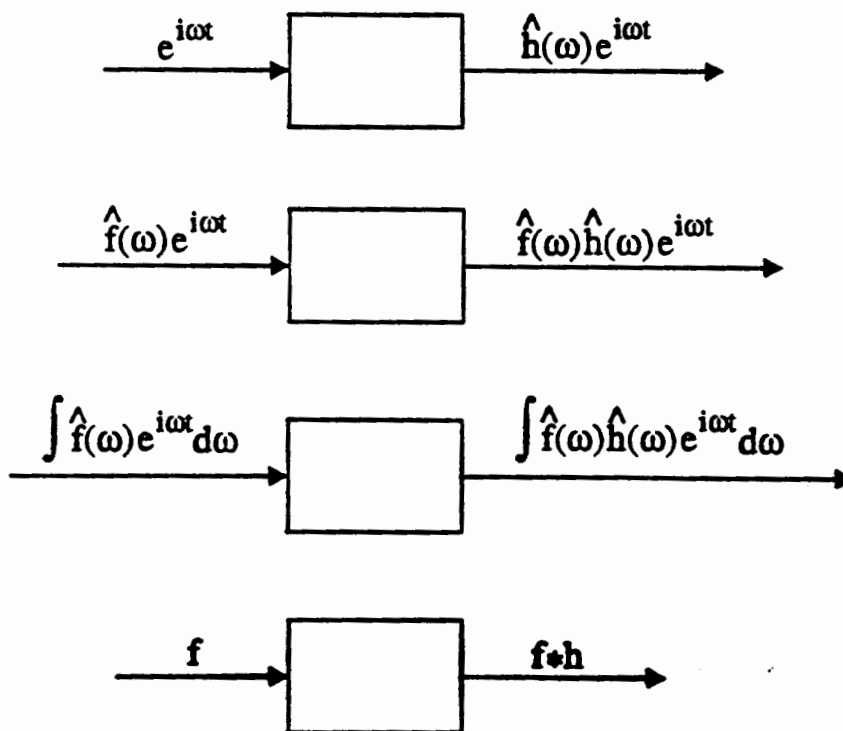
Steg 2. Enligt b) har insignalen $\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}$ utsignalen $\hat{f}(\omega)\hat{h}(\omega)e^{i\omega t}$.

Steg 3. Ett lämpligt kontinuitetsvillkor c) slutligen tillåter oss att summera (integrera) över parametervärdena och få som resultat att insignalen

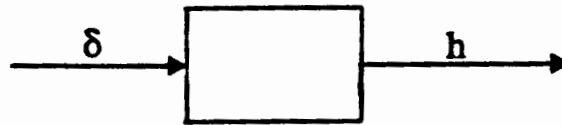
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

har utsignal

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{h}(\omega)e^{i\omega t} d\omega = (f * h)(t).$$



I härledningen ovan undvek vi operationen faltning i det längsta. Om vi däremot utnyttjar att δ är enhet under faltning, $f = \delta * f$, så kan vi finna utsignalen till f utan fouriertransformering. Låt insignalen $\delta(t)$ ha utsignal $h(t)$ (det s k pulssvaret).



Då har den flyttade pulsen $\delta(t - t_0)$ utsignalen $h(t - t_0)$ enligt a). Men en godtycklig insignal $f(t)$ kan skrivas

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - v) f(v) dv.$$

Enligt b) och c) skall denna överlagring av deltapulser ha utsignalen

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - v) f(v) dv = (h * f)(t).$$

En svart låda (ett system), som uppfyller villkoren a)-c) ovan, kan alltså *alltid* beskrivas medelst faltning.

Detta appendix är inspirerat av Harald Lang. Figurerna har gjorts av Henrik Karlsson, F-86, som även ritat om en del andra bilder i kompendiet.

APPENDIX I

Svar till vissa övningar

Övning 5.

$$g_1(t) = 1$$

$$g_2(t) = t - \frac{1}{2}$$

$$g_3(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

$$\varphi_1 = g_1$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{12} \left(t - \frac{1}{2} \right)$$

$$\varphi_3(t) = \sqrt{180} \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right)$$

Övning 7. Vi skall beräkna integralen

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + \omega^2} d\omega,$$

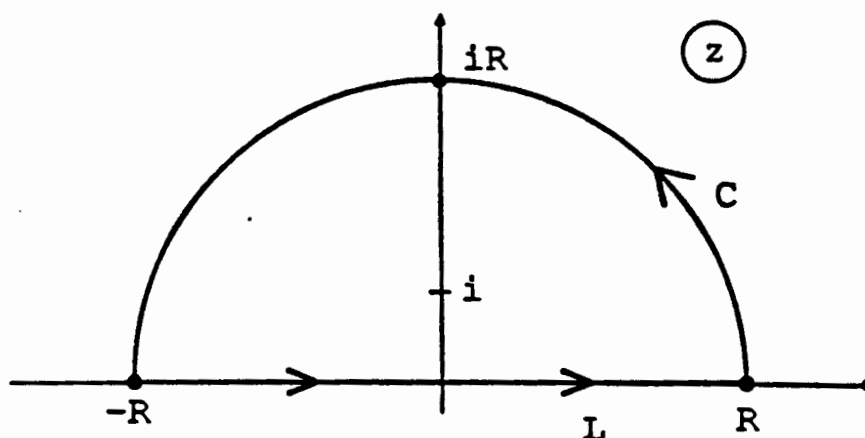
där t är en reell parameter. Den analytiska funktionen

$$F(z) = \frac{e^{izt}}{1 + z^2}$$

har enkelpoler i $z = \pm i$ och

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=i} F(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \left[(z - i) F(z) \right] = \left[\frac{e^{izt}}{z + i} \right]_{z=i} \\ &= \frac{e^{iit}}{2i} = \frac{e^{-t}}{2i}. \end{aligned}$$

Fall 1. Antag tills vidare att $t \geq 0$. Då kan vi utnyttja konturen $\Gamma = C \cup L$ (se figur).



Residusatsen ger

$$\int_C F dz + \int_L F dz = \int_{\Gamma} F dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} F \quad (*)$$

I övre halvplanet är $\operatorname{Im} z = y \geq 0$. Av likheten $e^{izt} = e^{i(x+iy)t} = e^{(-y+ix)t}$ följer att

$$|e^{izt}| = e^{-yt} \leq [y \geq 0, t \geq 0] \leq 1.$$

Integralen över C kan uppskattas,

$$\begin{aligned} \left| \int_C F dz \right| &\leq \int_C |F(z)| |dz| = \int_C \frac{|e^{izt}|}{|1+z^2|} |dz| \\ &\leq \int_C \frac{1}{|1+z^2|} |dz| \leq \int_C \frac{|dz|}{R^2-1} = \frac{\pi R}{R^2-1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

då $R \rightarrow \infty$. Vidare gäller att

$$\int_L F dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ixt}}{1+x^2} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{1+x^2} dx = G(t),$$

då $R \rightarrow \infty$. Vi låter nu $R \rightarrow \infty$ i relation (*) och finner att

$$G(t) = 2\pi i \frac{e^{-t}}{2i} = \pi e^{-t}.$$

Fall 2. För att beräkna $G(t)$ för negativa t kan vi resonera på flera olika sätt.

a) Eftersom

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1+\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t + i \sin \omega t}{1+\omega^2} d\omega \\ &= [\text{sinus är udda}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{1+\omega^2} d\omega, \end{aligned}$$

ser vi att G är en jämn funktion av t , $G(-t) = G(t)$. Detta ger att

$$G(t) = \pi e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Om $t \leq 0$ kan vi utnyttja en kontur i undre halvplanet och residu

$$\operatorname{Res}_{z=-i} F(z) = \left[\frac{e^{izt}}{z-i} \right]_{z=-i} = \frac{e^t}{(-2i)}.$$

Appendix I

Övning 18.

$$W''(x) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) - 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[x - (2k+1)\pi],$$

$$c_n(W'') = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & n \text{ udda,} \\ 0, & n \text{ jämn,} \end{cases}$$

$$c_n(W) = \frac{2}{\pi(in)^2} = \frac{-2}{\pi n^2}, \quad n \text{ udda,}$$

$$c_0(W) = \frac{\pi}{2},$$

$$c_n(W) = 0, \quad n \text{ jämn, } n \neq 0.$$

LITTERATURFÖRTECKNING

- [1] AHLFORS, L.V., *Complex analysis*, tredje upplagan, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [2] ARSAC, J., *Fourier Transforms and the Theory of Distributions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- [3] CHURCHILL, R. V. & BROWN, J. W., *Fourier series and boundary value problems*, McGraw-Hill, New York, 1978.
- [4] CODDINGTON & LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [5] DAHLBERG, E., JOSEFSSON, T. & WESTERLING, L. *Fourieranalys och Generaliserade funktioner med Tillämpningar*, Stockholm, 1973.
- [6] DONOGUE, W., *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, New York and London, 1969.
- [7] GELFAND & SHILOV, *Generalized functions*, vol I, Academic Press, 1964. (Andra ryska upplagan utkom i Moskva år 1959.)
- [8] HÖRMANDER, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, I-IV, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1983-1985.
- [9] PETERSSON, J., *Fourieranalys*, Göteborg, 1984.
- [10] SCHWARTZ, L., *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1965. (Finns också i engelsk upplaga.)
- [11] SPANNE, S., *Föreläsningar i Lineära System*, Lund, 1985.
- [12] VLADIMIROV, V.S., *Уравнения математической физики*, Наука, Москва 1967 (finns på engelska, *Equations of mathematical physics*, Marcel Dekker, New York, 1971).
- [13] ZEMANIAN, A., *Distribution Theory and Transform Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [14] ZYGMUND, A., *Trigonometric Series*, I & II, second edition, Cambridge University Press, 1959.

Detta är ett litet och kanske godtyckligt urval av den tillgängliga litteraturen. Referenserna kan karakteriseras enligt följande:

Elementära: [3], [5], [9], [11]

På mellannivå med inriktning mot tillämpningar: [2], [10], [12], [13]

På mellannivå med inriktning mot teori: [1], [6]

Standardverk: [4], [7], [8], [14]

INDEX

- absolutintegrabel 6, 65
- amplitudmodulering 67
- amplitudresonans 28
- approximation i kvadratisk medel 41
- Bessels differentialekvation 60
- Bessels olikhet 42, 165
- Carlesons sats 11
- Cauchys olikhet 37
- Chebyshev, se Tjebysjov
- demodulering 68
- deriveringregeln 69, 74, 125
- detektering 68
- differentialekvationer 26-31, 141-149
- dipol 81
- Diracmått, Diracpuls, Diracs deltafunktion 85, 88
- Dirichlets problem 3, 7, 10
- distributionsderivata 94, 97
- DSB-SC 67
- egenfunktion 50
- egenvärde 50
- energiintegraler 78
- energiresonans 28
- energispektrum 78
- exponentiell form 2
- faltning 73, 127, 129, 169
- faltningssatsen 75, 76
- fourierkoefficienter 5, 40, 103
- Fouriers inversionsformel 65, 70, 72, 119
- Fouriers inversionssats 70
- Fouriers metod 2
- fouriertransform 63-80, 115, 118
- frekvensderivering 69, 125
- frekvensförskjutning 66, 125
- Fubinis sats 76
- fullständigt ON-system 43
- fullständigt ortogonalsystem 166
- funktional 74, 84, 86
- funktionen Ψ 103
- fysikalisk form 1, 17, 20
- generaliserad fouriersserie 105

generaliserad funktion 86
geometrisk multipliset 58
Gibbs' fenomen 155
Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess 45
Greens formel 54
harmonisk funktion 3
Heavisides språngfunktion 90
Hermitepolynomen 48
Hilbertrum 33
Hilberttransformen 131
impulssvar 74
inre produkt 32, 36
inreproduktrum 37, 52
jämn distribution 139
kausalt system 74
kompakt mängd 91
kompakt stöd 91
kontinuerlig funktional 86
konvergens i distributionsmening 98
konvergens i norm 43
konvergenssats för fourierserier 11, 12, 13, 22, 25, 26
Kroneckers delta 5
kvadratisk integrabel funktion 19, 21, 31, 35
kvadratisk medel 41
Laguerrepolynomen 47
Laplaces ekvation 3
Lebesguemått noll 11
Legendrepolynomen 47
lika på en öppen mängd 90
linearitet 66, 86, 125
linjär funktional 86
linjär operator 52
linjärt rum 35
linjärt system 74, 169
lokalt integrerbar funktion 89
mask 161, 167
matematisk resonans 30
maximumnorm 6
modulering 66, 125
multiplikator 92
måttligt växande funktion 91, 93
nollföljd 85

nollmängd 11
norm 21, 32, 37
normera 39
ortogonal 33, 38
ortogonalisera 46
ortogonalitetsrelation 5
ortogonalsystem 39, 165
ortonormalsystem 39
Parsevals formel 19, 20, 21, 33, 43, 44, 118
periodisk 1, 101
periodisk utvidgning 63
periodiska randvillkor 55
periodiskt pulståg 137
Plancherels formler 77
Poissonkärnan 7, 71
Poissons summationsformel 135
principalvärde 138
pulssvar 171
pulståg 132
punktmassa 81, 83
Pythagoras' sats 38
reduktionsregler 93, 147
resonans 26, 28, 30
Riemann-Lebesgues lemma 65
Riemannsumma 64
Schwartzklassen 85, 92
Schwarz' olikhet 37
separerade randvillkor 55
självdjungeform 52
skalärprodukt 32, 36, 37
slutna höljet 90
spektralanalys 73
spektralsyntes 73
spektraltäthet 73
spektrum 72
språng 25, 97
spänna upp 45, 166
stationär 30
struktursats för tempererade distributioner 97
Sturm-Liouvilleproblem 49-61
stöd 72, 90, 91
symmetrisk avbildning 52

tempererad distribution 86, 92
testfunktion 84, 85, 92, 159
tidsderivering 69, 125
tidsförskjutning 66, 125
tidsinvariant system 74, 169
tidsskalning 66, 125
Tjebysjovpolynomen 47
transient 27
translation 16
triangelolikheten 36, 38
trigonometrisk form 1, 17
udda distribution 139
udda utvidgning 51
uppräknligt oändlig dimension 33
variabelseparation 2
viktsfunktion 35
värmeledningsekvationen 3, 49
växelströmsteori 20
Wronski-determinant 53
ändlig fouriertransform 137
överföringsfunktion 169
 δ_{mn} 5
 e_n 31
 $H_n(t)$ 48
 $J_n(t)$ 60
 $L_n(t)$ 47
 $P_n(t)$ 47
 $T_n(t)$ 47
III sja 101
 $1/(i\omega + 0)$ 140
< , > inre produkt 32, 36, 37
< , > verkan av distribution (parning) 85
 \perp 32, 38
 $\| \|$ 32, 37
 $\| \|_N$ 88, 157
 \mathcal{F} 65
 \mathcal{F} 85, 92
 \mathcal{F}' 86, 92, 98
 $D(A)$ 52
 C^k 12
 $L^1(\mathbb{R})$ 65
 ℓ^2 21

182

 L^2 21, 31 $L^2(a, b)$ 35 $L^2_w(a, b)$ 35 $L^\infty(\mathbb{R})$ 76