Matlab Laboration – Envariabelsanalys

Av:
Olov Samuelsson
Erik Axelsson

Uppgift 15

Vi ska plotta derivatan av arctan 2x samt uppskatta avvikelsen från den exakta derivatan. Vi skriver följande i matlab:

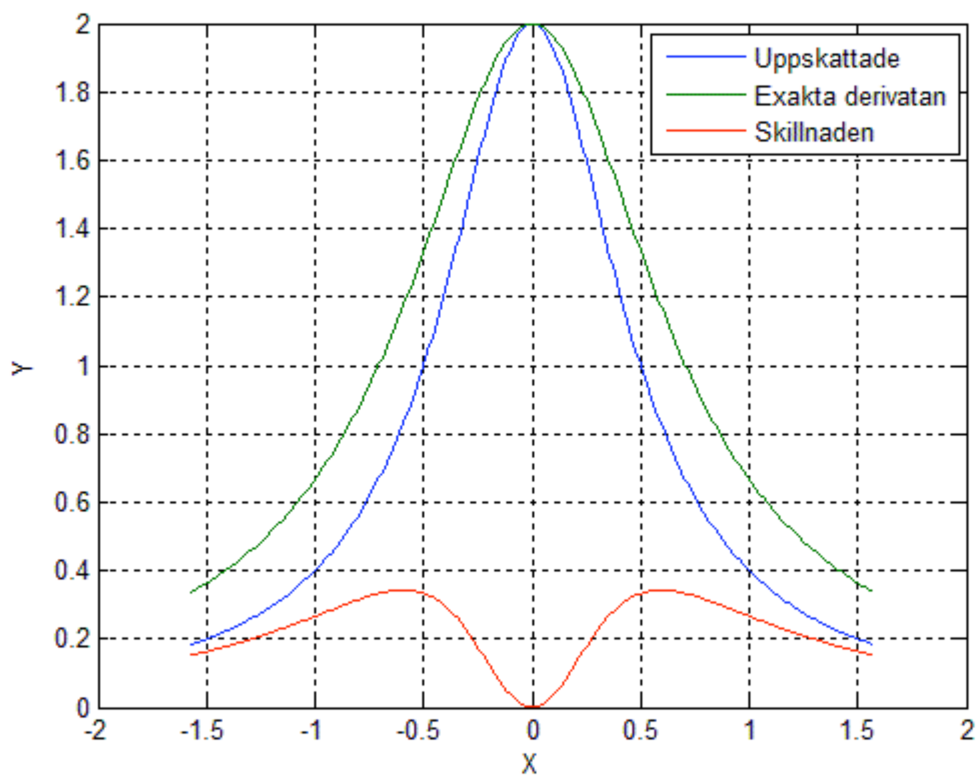
```
f=inline('atan(2*x)','x')            <-- Skapar funktionen.

df_exakt=2./(1+2*x.^2);              <-- Exakta derivatan.

df_approx =(f(x+h)-f(x-h))/(2*h);   <-- Uppskattade derivatan (h = e^-12).

skillnaden = df_exakt - df_approx
```

För att få så bra approximation till derivatan som möjligt använder vi medelvärdet av vänster och höger derivatan (df_approx). Ju längre från noll vi kommer så ökar skillnaden.

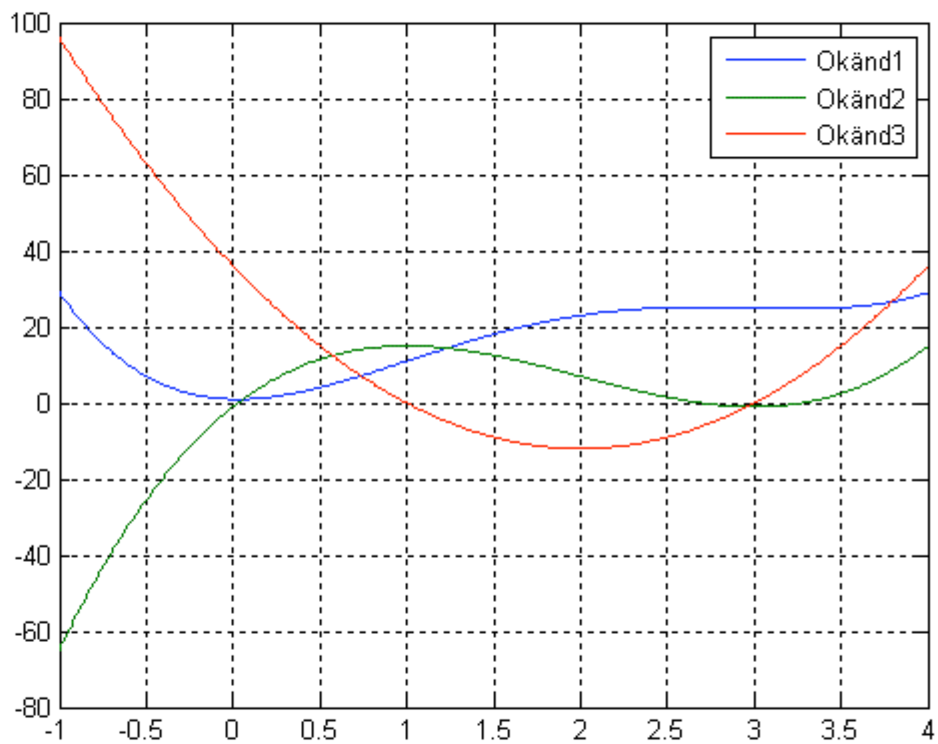


Uppgift 16

Vi ska utföra följande kommandorader.

```
f=inline('polyval([1 -8 18 -1 1],x)','x')
x=-1:0.01:4;
h=0.01;
df=(f(x+h)-f(x-h))/(2*h);
ddf=(f(x+h)-2*f(x)+f(x-h))/(h^2);
plot(x,f(x),x,df,x,ddf),grid
```

Av koden ovan kommer vi plotta en funktion med andra och tredje derivatan. Vi ska avgöra grafiskt vilken som är vilken.



Den blå kurvan har 3 lokala extrempunkter, den gröna har 2 och den röda 1. Av detta kan vi dra slutsatsen att den blå är ursprungsgrafen, den gröna är första derivatan och den röda är andra derivatan, eftersom när man deriverar en funktion så minskar man graden på dess polynom med ett.

Uppgift 17

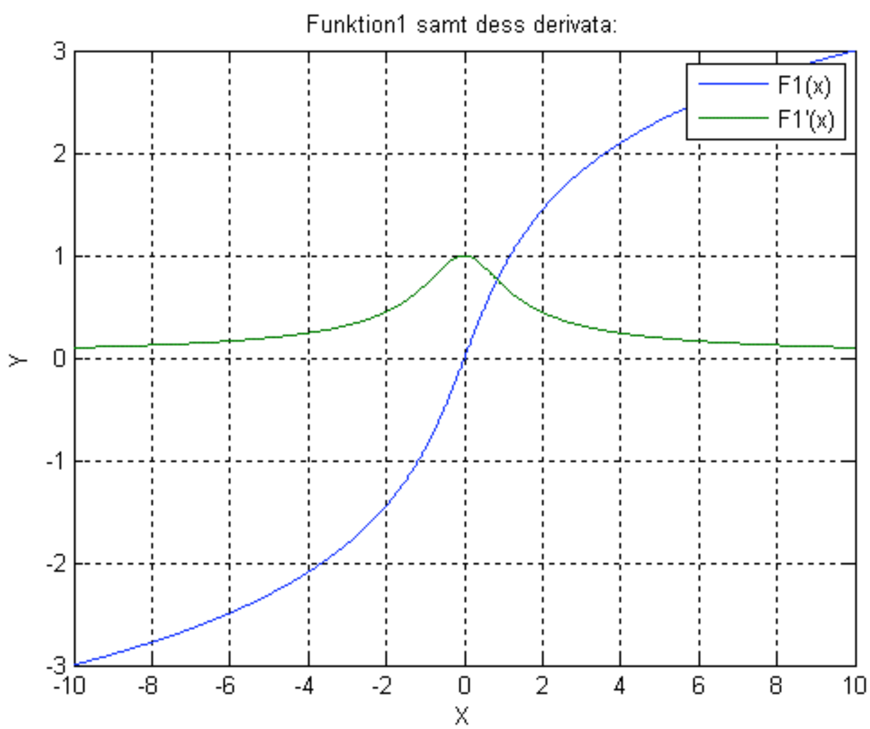
Vi ska plotta upp tre funktioner samt dess derivator och avgöra grafiskt ifall de är kontinuerliga, deriverbara och har en kontinuerlig derivata.

Funktion 1:

F1(x) = $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

F'1(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Vi erhåller grafen nedan:



Vi ser att varken funktionen eller dess derivata bryter i någon punkt dvs hoppar. De är båda kontinuerliga eftersom de är definierade för alla x.

Om gränsvärdet $\lim_{h->0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existerar så säges f vara deriverbar i punkten x_0. Om funktionen är deriverbar för alla punkter i sin definitionsmängd säger vi kortfattat att f är deriverbar. Funktionen ovan är deriverbar eftersom alla punkter deriverbara.

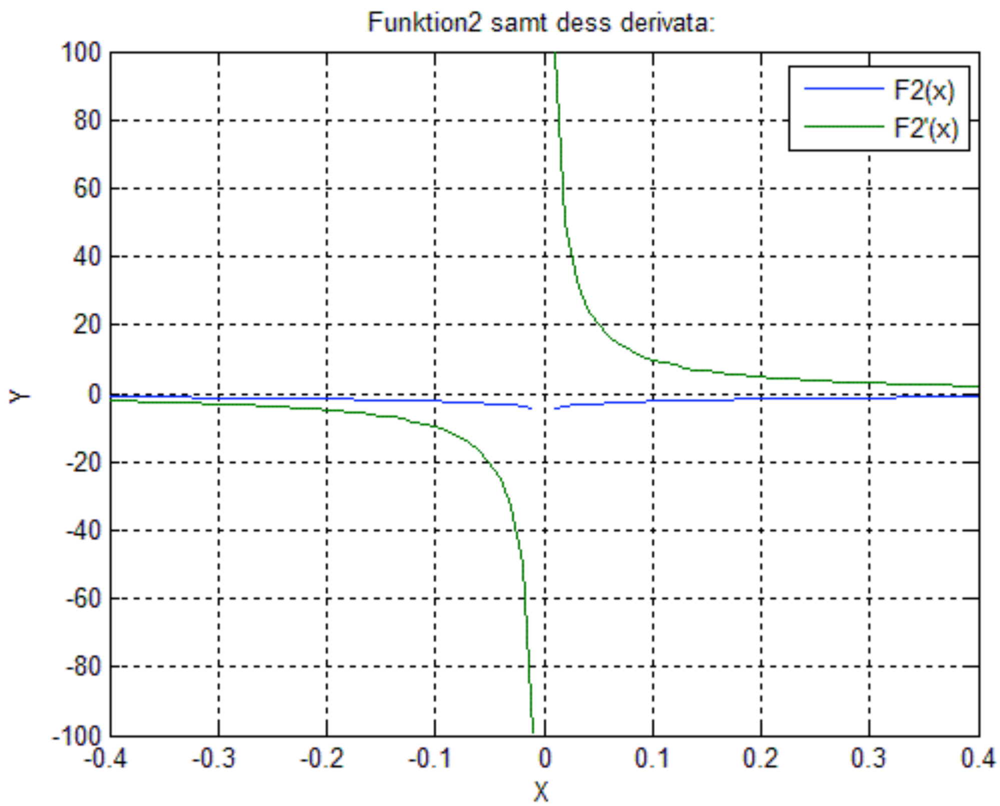
Envariabelsanalys matlab labb2 uppgift 15-18.

Funktion 2:

F2 = $\ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

F'2 = $\frac{1}{x(1+x^2)}$

Vår graf:



Här ser vi att funktionen inte är kontinuerlig i mitten av grafen. Detta kan enkelt kontrolleras genom att sätta in t ex värde 0. Vi ser då att grafen ej är definierad för det värdet. Derivatan är ej heller kontinuerlig eftersom den kommer och går mot oändligheten.

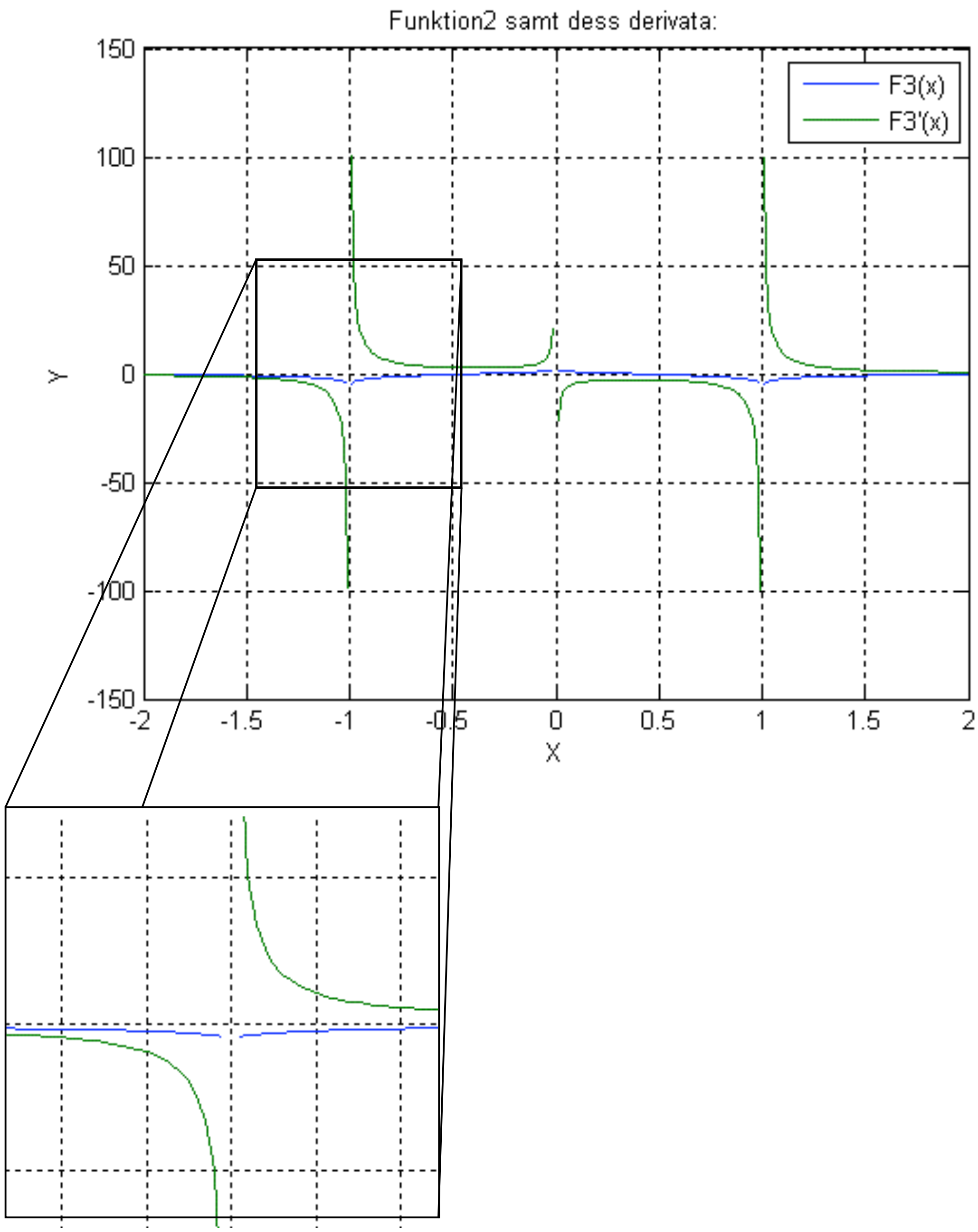
Envariabelsanalys matlab labb2 uppgift 15-18.

Funktion 3:

F3 = $\ln\left|\ln|x|\right|$

F'3 = $\dfrac{1}{x\ln|x|}$

Vår graf:



Funktionen är ej heller definierad för värdet x = -1,0 samt 1, vilket resulterar i att funktionen inte är kontinuerlig. Derivatan löper mot oändligheten och kan därför inte heller vara kontinuerlig. Deriverbar för alla x utom t ex -1,0 samt 1.

Uppgift 18

Bestäm en metod för numerisk beräkning av tredjederivatan och plotta m.h.a. denna tredjederivatan av $f(x) = xe^x$ (obs! du får inte använda det exakta uttrycket på derivatan).

Vi vet att första derivatan definieras på följande vis:

$$f^1(x) = \lim_{h->0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

För att beräkna nästa derivata använder vi formeln nedan:

$$f^{n+1}(x) = \lim_{h->0} \frac{f^n(x+h) - f^n(x)}{h}$$

Vi börjar med att ta fram andra derivatan:

$$f^2(x) = \lim_{h->0} \frac{f^1(x+h) - f^1(x)}{h}$$

$$f^2(x) = \lim_{h->0} \frac{f(x+h+h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)}{h^2} =$$

$$f^2(x) = \lim_{h->0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

Tredje derivatan:

$$f^3(x) = \lim_{h->0} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h} =$$

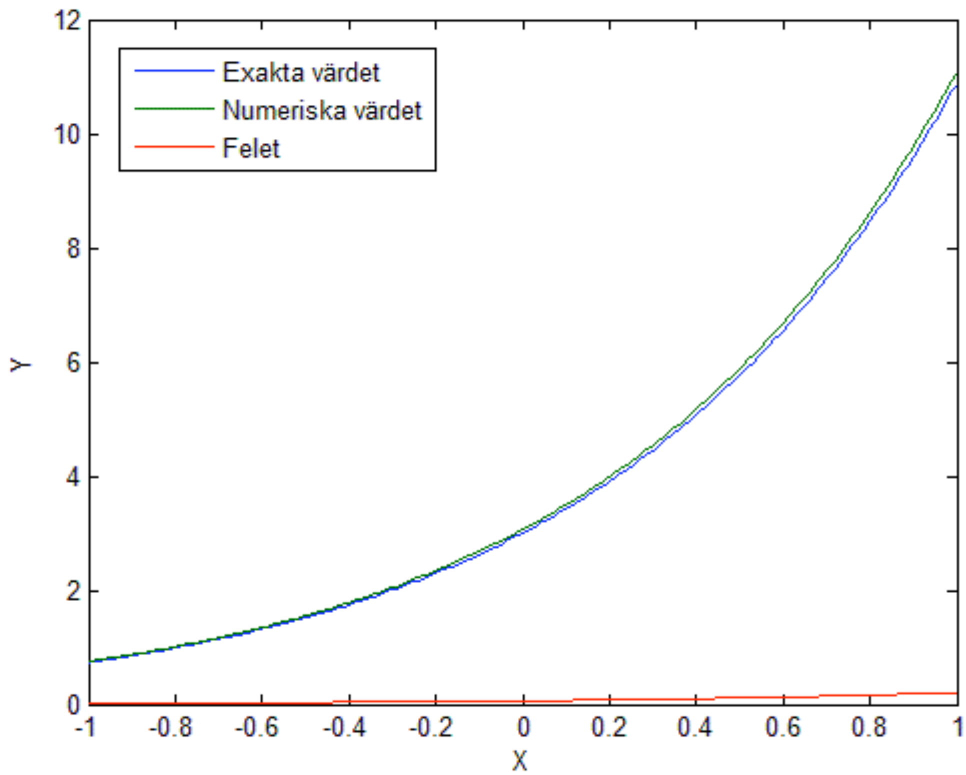
$$f^3(x) = \lim_{h->0} \frac{f(x+3h) - 2f(x+2h) + f(x+h) - f(x+2h) + 2f(x+h) - f(x)}{h^3} =$$

$$f^3(x) = \lim_{h->0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} =$$

Envariabelsanalys matlab labb2 uppgift 15-18.

Nu har vi fått fram en numerisk formel för beräkning av tredje derivatan. Med denna formel ska vi plotta upp tredje derivatan av funktionen $f(x) = xe^x$

Det exakta uttrycket för tredje derivatan av $f(x) = xe^x$ är av $f^3(x) = xe^x + 3e^x$ <-- att jämföra med vår numeriska derivata



Av grafen ser vi att vår numeriska formel stämmer så när inpå den exakta derivatan, felet är marginelt.