Rapport - Lab 4: Serier

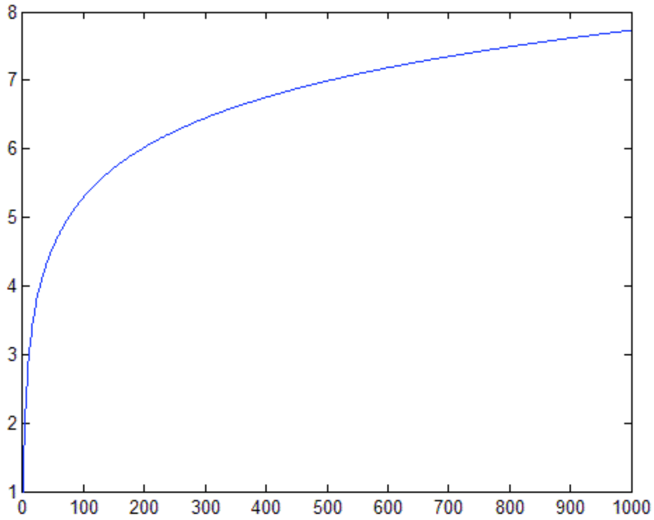
Av: Jerker Skogby och Dino Strömberg

Uppgifter

Uppgift 30

Beräkna de tusen första delsummorna till följande serier och försök avgör om de är konvergenta eller divergenta.

Figur 1 visar grafen till serien då k går till 1000. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{0,99}}$



Med de 1000 första värdena på k är det svårt att avgöra om grafen är konvergent eller divergent.

För att avgöra om serien är konvergent eller divergent provade vi olika värden på k och förde in dessa i en tabell:

$k = 10^x$	$\frac{1}{k^{0,99}}$
x=1	0.10232929922808
x=2	0.01047128548051
x=3	0.00107151930524
x=4	0.00010964781961
x=5	0.00001122018454
x=6	0.00000114815362
x=7	0.00000011748976
x=8	0.00000001202264
x=9	0.00000000123027

Man kan tydligt se att när k ökar så minskar delen av summan och är på väg mot noll, men för att undersöka saken närmre:

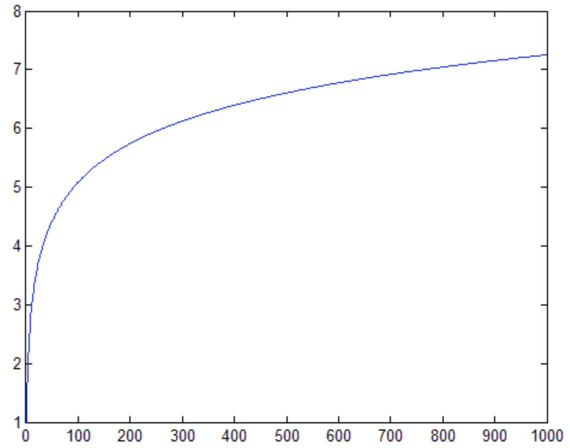
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{0,99}} \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{0,999}} dx = \int_1^{\infty} x^{-0,999} dx = \lim_{a \to \infty} \left[\frac{x^{-0,999+1}}{-0,999+1} \right]_1^a = \lim_{a \to \infty} \left[\frac{x^{0.001}}{0,001} \right]_1^a = \lim_{a \to \infty} \frac{a^{0.001}}{0,001} - \frac{1}{0,001} = \infty$$

Det vill säga:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{0,99}} \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{0,999}} dx = Divergent \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{0,99}} = Divergent$$

Svar: Integraltest ger oss att serien är divergent.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1,01}}$ **Figur 2** visar grafen till serien då k går till 1000.



Även här är det svårt att avgöra om serien divergerar eller konvergerar.

Därför gjordes även här en tabell:

k=10^x	$\frac{1}{k^{1,01}}$
x=1	0.09772372209558
x=2	0.00954992586021
x=3	0.00093325430080
x=4	0.00009120108394
x=5	0.00000891250938
x=6	0.00000087096359
x=7	0.00000008511380
x=8	0.00000000831764
x=9	0.00000000081283

Här ser vi att ju större värdet på k blir ju mindre blir delen av summan. För säkerhets skull beräknar vi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1,01}} \le \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1,001}} dx = \int_1^{\infty} x^{-1,001} dx = \lim_{a\to\infty} \left[\frac{x^{-1,001+1}}{-1,001+1} \right]_1^a = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{x^{-0,001}}{0,001} \right]_1^a = -\lim_{a\to\infty} \frac{1}{0,001a^{0,001}} + \frac{1}{0,001} =$$

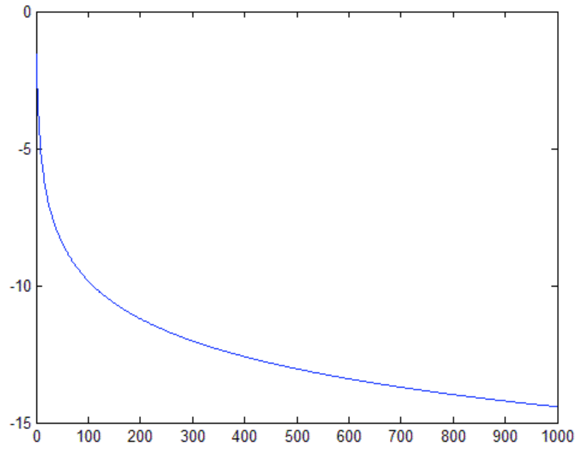
$$= -0 + \frac{1}{0,001} = 1000 = TAL$$

Det vill säga:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1,01}} \le \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1,001}} dx = Konvergent \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1,01}} = Konvergent$$

Svar: Integraltest ger oss att summan är konvergent.

c) $\sum_{k=1}^{\infty}(2\arctan k-\pi)$ Även här visar de 1000 första värdena inte riktigt någon bra uppskattning för hur det skulle se ut när k går mot oändligheten. Se **Figur 3**.



För att ta reda på om kurvan var konvergent så skapades en tabell:

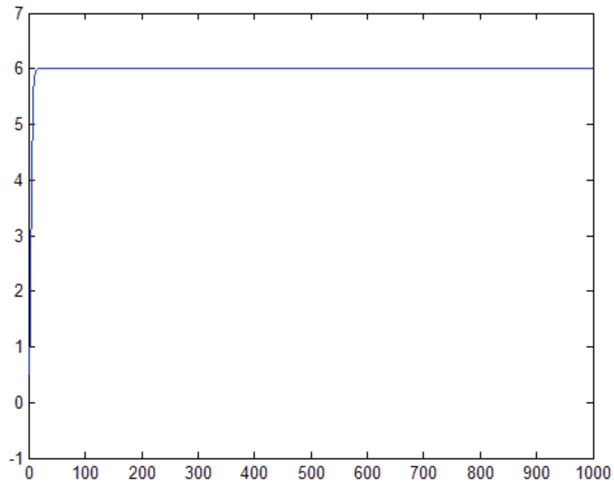
k=10^x	$2\arctan k-\pi$
x=1	-0.19933730498232
x=2	-0.01999933337333
x=3	-0.00199999933333
x=4	-0.00019999999933
x=5	-0.00002000000000
x=6	-0.00000200000000
x=7	-0.00000020000000
x=8	-0.00000002000000
x=9	-0.00000000200000

Tabellen visar att delen av summan går närmre noll för varje steg, men för säkerhets skull beräknades ett värde för när: $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty}(2\arctan k-\pi) = 2\frac{\pi}{2}-\pi = 0$$

Det vill säga: Summan är konvergent.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ Grafen till denna serie, som visas i **Figur 4** visar direkt att serien är konvergent och att seriens värde kommer bli 6 då k går mot oändligheten.



Men vi valde ändå att skapa en tabell:

k=x	$\frac{k^2}{2^k}$
x=10	0.09765625000000
x=20	0.00038146972656
x=30	0.00000083819032
x=40	0.00000000145519
x=50	0.00000000000222
x=60	0.00000000000000
x=70	0.00000000000000
x=80	0.00000000000000
x=90	0.00000000000000

Som tabellen anger så går delen av summan mot noll för höga värden på k.
Det vill säga: Serien är konvergent.

Uppgift 31

Använd kommandot sum för att beräkna ett approximativt värde på den konvergenta serien $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ *. Beräkna sedan seriens exakta värde m.h.a. formel för geometriska summor.*

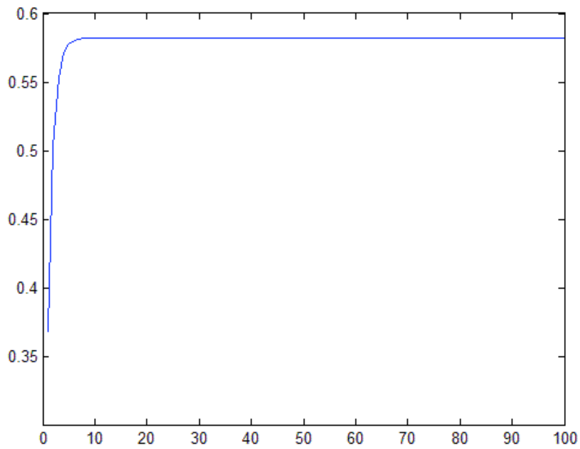
Beräkning med geometrisk summa:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^k - 1 = \left[\left(\frac{1}{e}\right)^k < 1 \rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{e}}\right] = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} - \frac{1-\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} =$$

$$= \frac{1-1+\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1} = 0.5820$$

Summan beräknades och gav att: $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = 0.5820$

Figur 5 visar hur serien ser ut:



Tabell till figuren:

k=x	Delsumma till: $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$
x=1	0.36787944117144
x=10	0.58197670686933
x=20	0.58197670686933
x=30	0.58197670686933

Ur Tabellen får vi att delsumman inte ökar något när k ökar. Det vill säga att serien är konvergent och har värdet $0.58197670686933 \approx 0.5820$ vilket var samma värde vi fick genom beräkning av geometriska formler.

Uppgift 32

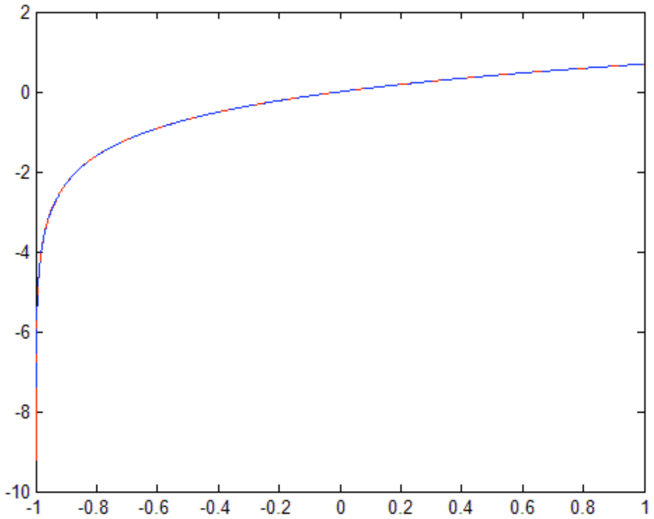
Man kan visa att $\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ *för* $-1 < x \le 1$. *Undersök VL och HL i denna identitet för några olika värden på x. Bekräftar dina iaktagelser att identiteten verkar stämma ?*

Lösning:

VL = f(x) = $\ln(x+1)$

HL = g(x) = $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$

De båda funktionerna, f(x) och g(x) sattes in i samma graf, **Figur 8**:



Som man kan se genom grafen är värdena näst väldigt lika. Det vill säga att $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ är en bra approximation till $\ln(x+1)$.

Men för att vara säker skapades en tabell med några värden:

x	$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$	$\ln(x+1)$
-0,9999	-7.38791399070318	-9.21034037197629
-0,5	-0.69294720055728	-0.69314718055995
0	0.00009999500033	0
0,5	0.40486492803613	0.40546510810816
1	0.69249406989618	0.69314718055995

Som man ser i tabellen så ligger värdena mycket nära varandra och därför har vi än en gång visat att $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ är en bra approximation till $\ln(x+1)$. Men man kan se att när x närmar sig -1 så blir den sämre.

Uppgift 33

Tag hjälp av Matlab för att besvara frågorna i uppgift 1.29a ur övningskompendiet 'Övningar i Envariabelanalys'. Gör sedan uppgift 1.29b.

a) *Uttryck* ${}^{10}\log x$ *i ln(x).*

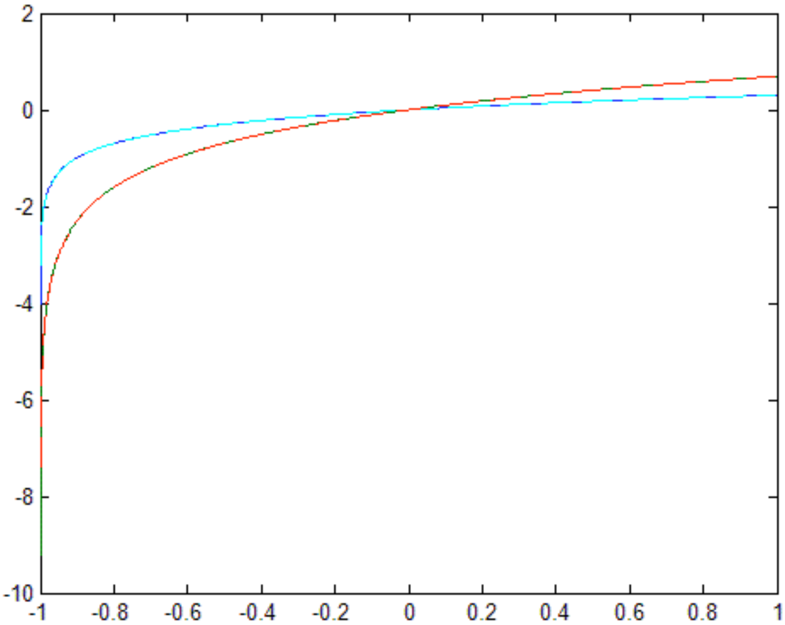
Enligt logaritmreglerna:

$${}^{a}\log x = \frac{{}^{b}\log x}{{}^{b}\log a} \Rightarrow {}^{10}\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \Rightarrow {}^{10}\log(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\ln 10}$$

Taylorutveckling av: $\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$

Detta ger oss att: $\log(x+1) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$

Sedan plottade vi ut grafen, **Figur 9**, för log(x) i mörkblått och vår beräknade taylorutveckling i rött (de andra två graferna i rött/grönt är för ln(x+1) och taylorutvecklingen för denna).



Som man kan se i graferna stämmer värdena överens mycket bra.
Vi gjorde även en tabell för att visa detta, se nästa sida.

Tabell för jämförelse: $\log(x+1) = \frac{1}{\ln 10}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$

x	$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$	$\ln(\mathrm{x}+1)$
-0,9999	-3,20853027893822	-4,00000000000005
-0,5	-0,30094314545233	-0,30102999566398
0	0,00004342727686	0
0,5	0,17583060416225	0,17609125905568
1	0,30074635330664	0,30102999566398

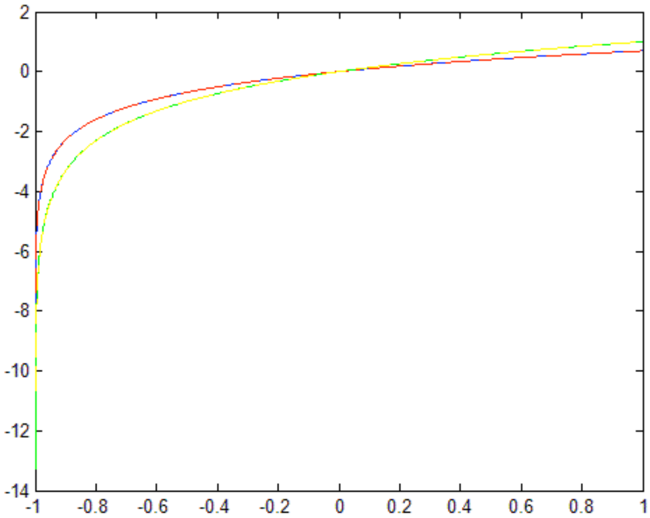
Tabellen visar även den att $\log(x+1)$ är en bra approximation för $\frac{1}{\ln 10}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ i området $-1 < x \leq 1$. Men man kan se att när x närmar sig -1 så blir den sämre.

b) *Uttryck* $^2\log x$ *i ln(x).*

Samma beräkningar som i a-uppgiften gjordes och gav oss:

$$^2\log(x+1) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

Även här plottades graferna ut i **Figur 10**. Gul är $^2\log x$ och grön taylorpolynomet till denna (blå och röd är ln(x)).



Som man kan se i graferna stämmer även här värdena överens mycket bra.

Tabell:

x	$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$	$\ln(x+1)$
-0,9999	-10.65850687690167	-13.28771237954961
-0,5	-0.99971148984188	-1.00000000000000
0	0.00014426229110	0
0,5	0.58409662390760	0.58496250072116
1	0.99905776048424	1.00000000000000

Tabellen visar även den att $^2\log(x+1)$ är en bra approximation för $\frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ i området $-1 < x \leq 1$. Men man kan se att när x närmar sig -1 så blir den sämre.

Bilaga: Matlab-filer

Uppgift 30.

```
clear
%Uppgift a.

%Startvärdet på vår serie.
s(1)=1/(1^0.99);

%for-loop för att beräkna de 1000 första värdena på k.
for k=2:1000, s(k)=s(k-1)+1/(k^0.99);

end

figure(1)
plot(s)

%Uppgift b:
clear

%Startvärdet på vår serie.
s(1)=1/(1^1.01);


%for-loop för att beräkna de 1000 första värdena på k.
for n=2:1000, s(n)=s(n-1)+1/(n^1.01);

end

figure(2)
plot (s)

%Uppgift c:
clear


%Startvärdet på vår serie.
s(1)=2*atan(1)-pi;

%for-loop för att beräkna de 1000 första värdena på k.
for k=2:1000, s(k)=s(k-1)+(2*atan(k)-pi);

end

figure(3)
plot (s)

%Uppgift d:
clear

%Startvärdet på vår serie.
s(1)=1/2;
```

```
%for-loop för att beräkna de 1000 första värdena på k.
for k=2:1000, s(k)=s(k-1)+((k^2)/(2^k));

end

figure(4)
plot (s)
axis([-1 1000 -1 7])
```

Uppgift 31

```
%Uppgift a.
clear

%vektor med x=1 t.o.m. x=100
x = 1:100;

%y är en vektor med värdena av funktionen med insatt x-vektor
y=1./exp(x);

%Varje delsumma sparas som en koordinat i vektorn y med kommandot sum(y)
sum(y);

%Summan plottas ut
plot (y);



%Uppgift b. Här beräknas seriens exakta värde.
clear
s(1)=1/exp(1);

%loop för att räkna ut varje delsumma
for k=2:100, s(k)=s(k-1)+(1/exp(k));

end

figure(2)
plot (s)
%axis([-1 100 -1 7])
```

Uppgift 32

```
clear

f = inline('log(x+1)', 'x');

x = -0.9999;                            %Sätt x startvärde.

for i=1:1:2000;                         %loop.

    k = 1:1000;                         %k's intervall.
    y = ((-1).^(k-1)) .* (((x).^k)./k); %beräkna delsumman.
    a(i) = sum(y);                      %Spara delsumman i a.
    x = x + 0.001;                      %Lägg till 0.001 till x.

end


t = -0.9999:0.001:0.9991;          %X-värde för a.
x = -0.9999:0.0001:1;              %X-värde för f.

plot (x, f(x), t, a);              %P
```

Uppgift 33a

```
clear

f = inline('log(x+1)', 'x');
g = inline('log10(x+1)', 'x');

x = -0.9999;                            %Sätt x startvärde.


for i=1:1:2000;                         %loop.

    k = 1:1000;                         %k's intervall.
    y = ((-1).^(k-1)) .* (((x).^k)./k); %beräkna delsumman.

    a(i) = sum(y);                      %Spara delsumman i a för ln(x+1).
    b(i) = sum(y)/log(10);              %Spara delsumman i b för log(x+1).
    x = x + 0.001;                      %Lägg till 0.001 till x.

end


t = -0.9999:0.001:0.9991;          %X-värde för a.
x = -0.9999:0.0001:1;              %X-värde för f.


plot (x, g(x), t, b, x, f(x), t, a);              %Plotta funktionen.
```

Uppgift 33b

```
clear

f = inline('log(x+1)', 'x');
g = inline('log10(x+1)', 'x');
h = inline('log2(x+1)', 'x');

x = -0.9999;                               %Sätt x startvärde.


for i=1:1:2000;                            %loop.

    k = 1:1000;                            %k's intervall.
    y = ((-1).^(k-1)) .* (((x).^k)./k);    %beräkna delsumman.

    a(i) = sum(y);                         %Spara delsumman i a för ln(x+1).
    b(i) = sum(y)/log(10);                 %Spara delsumman i b för log(x+1).
    c(i) = sum(y)/log(2);

    x = x + 0.001;                         %Lägg till 0.001 till x.

end


t = -0.9999:0.001:0.9991;             %X-värde för a.
x = -0.9999:0.0001:1;                 %X-värde för f.


plot (x, g(x), t, b, x, f(x), t, a, x, h(x), t, c);               %Plotta
funktionen.
```