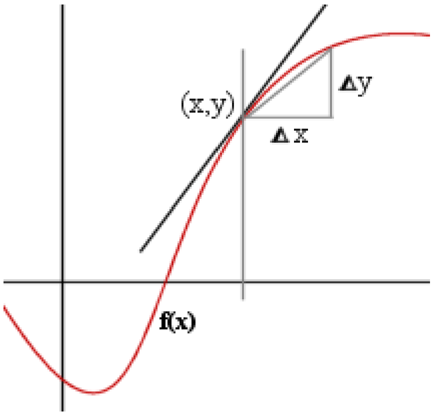
Datorövning i MATLAB

2B1147 Envariabelsanalys

Uppgift2: Derivator



Författare: Dino Strömberg, Jerker Skogby

Rapport skriven 2007-03-01

Rapport korrigerad 2007-03-06

Innehållsförteckning

I. Approximerad derivata av arcustangenten

Denna uppgift gick ut på att plotta derivatan av $f(x)=\arctan 2x$. Sedan skulle vi även uppskatta avvikelsen av approximeringen från den äkta derivatan.

Den äkta derivatan för $f(x)=\arctan 2x$ ges av:

$$f(x)=g(h(x))$$
$$g(x)=\arctan(h(x))$$
$$h(x)=2x$$
$$f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)$$
$$g'(x)=\frac{1}{1+4x^2}$$
$$h'(x)=2$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2=\frac{2}{1+4x^2}$$

Den äkta derivatan kallar vi:

$$f_{äkta}'(x)=\frac{2}{1+4x^2}$$

En approximerad derivata ges av derivatans definition då h ej går mot noll (är konstant) vilken är:

$f_{närme}'(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Plottning av funktionen syns i Figur 1.1

Vi testade olika värden på h och kom fram till att h = 0,01 gav en approximation där man faktiskt kunde se skillnaden mellan närmevärdet på derivatan och den äkta derivatan.

$f_{närme}'(x)=\dfrac{\arctan(2x+0{,}02)-\arctan(2x)}{0{,}01}$ Plottning av funktionen syns i Figur 1.1

Skillnaden mellan den äkta derivatan och närmevärdet beräknas sedan genom:

$\Delta f_1'(x)=f_{äkta}'(x)-f_{närme}'(x)$ Plottning av skillnaden syns i Figur 1.2

För att få en bättre approximation kan man istället använda medelvärdet av vänster och högerderivatan vilket är:

$$f_{medel}'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

Det ger:

$$f_{medel}'(x)=\frac{\arctan(2x+0.02)-\arctan(2x-0.02)}{0.02}$$

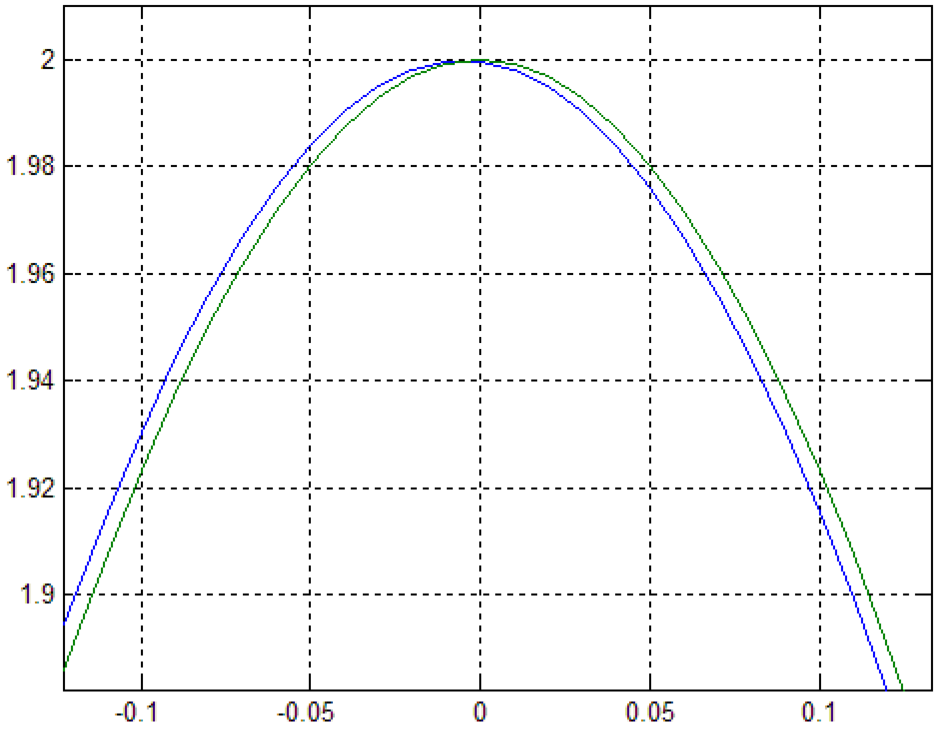
Plottning av funktionerna $f_{äkta}'(x)$ och $f_{medel}'(x)$ finns i Figur 1.3

Skillnaden mellan den äkta derivatan och den bättre approximationen får man genom:

$\Delta f_2'(x)=f_{äkta}'(x)-f_{medel}'(x)$ Plottning av denna finns i Figur 1.4

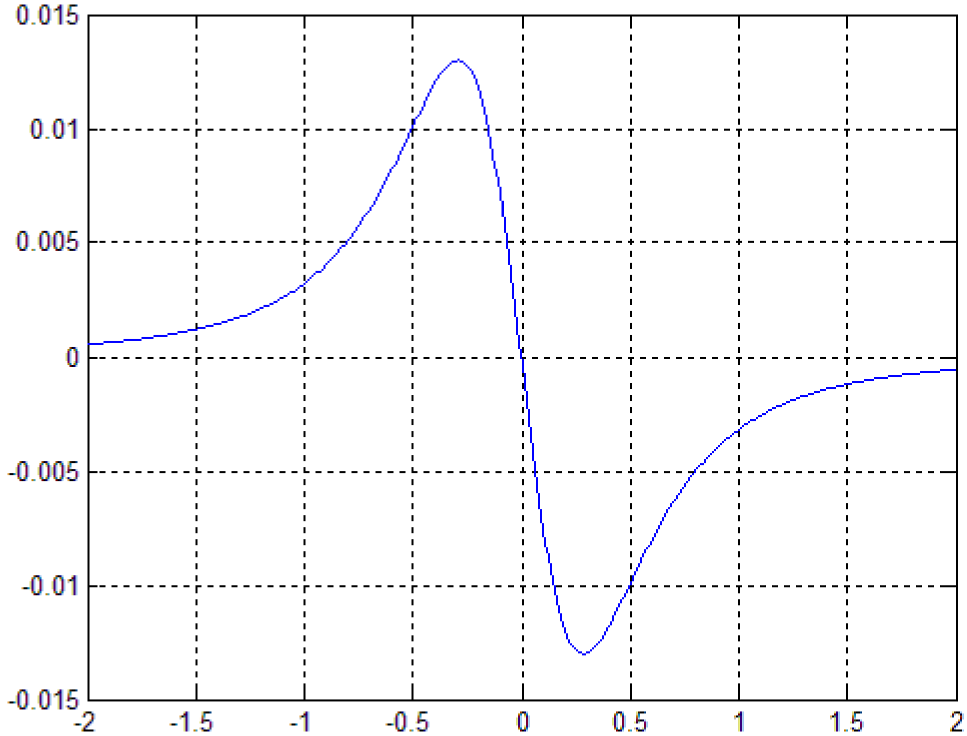
Figur 1.1

Den gröna linjen representerar den äkta derivatan medans den blå representerar den approximerade derivatan.



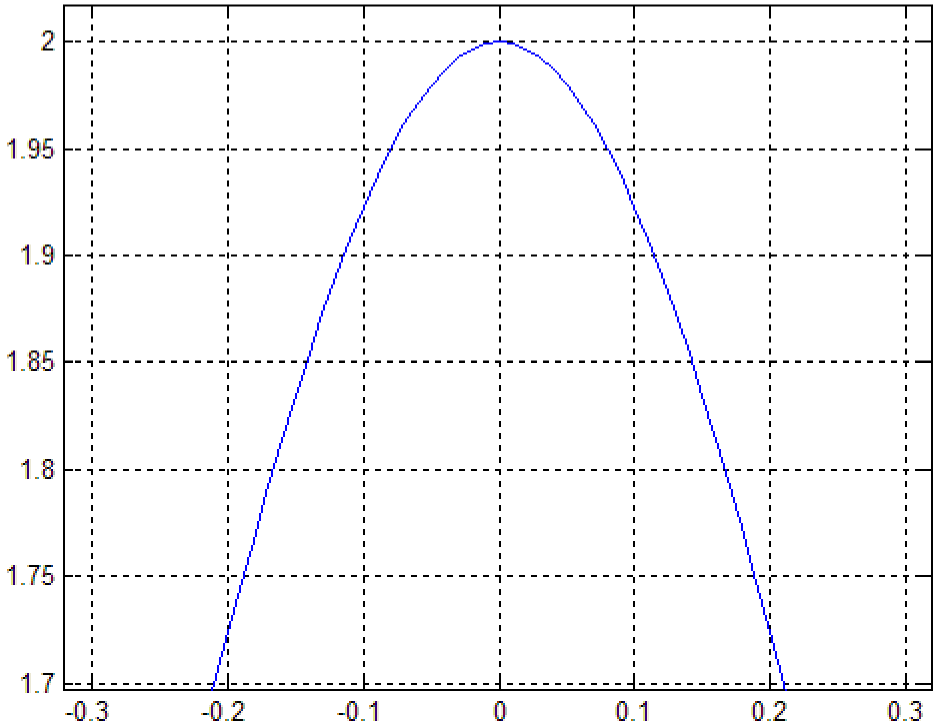
Figur 1.2

I grafen för skillnaden $\Delta f_1'(x)$ kan man upskatta det största felet till: $\Delta f_{1MAX}' \approx \pm 1{,}3 \cdot 10^{-2}$



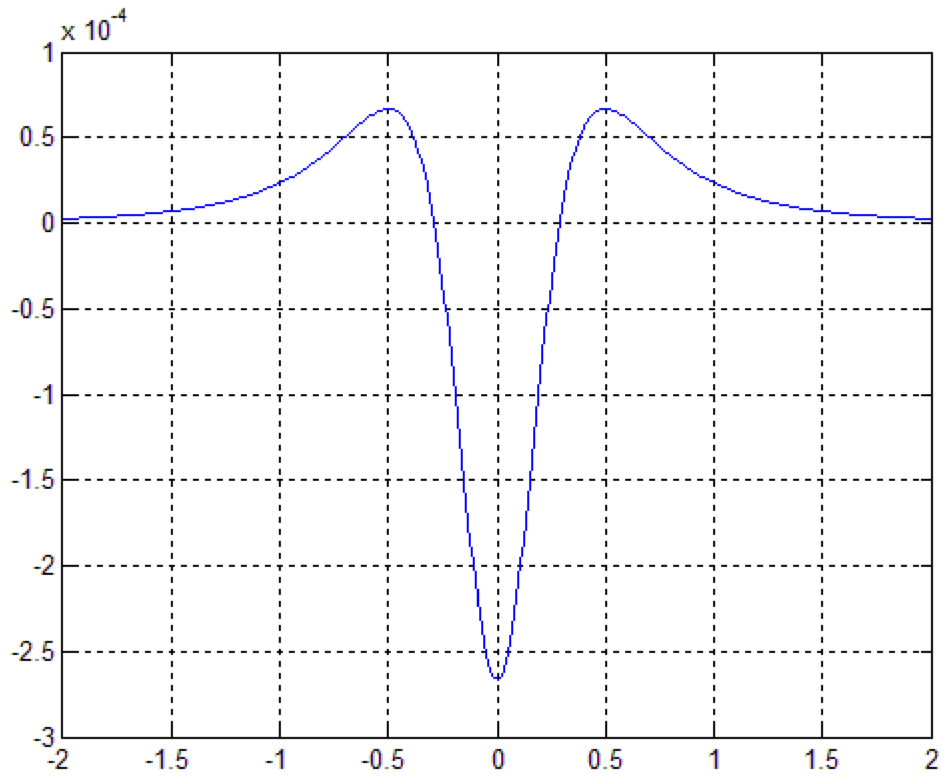
Figur 1.3

Nu kan man se att graferna ligger väldigt nära varandra även för ett värde på h så högt som 0.01.



Figur 1.4

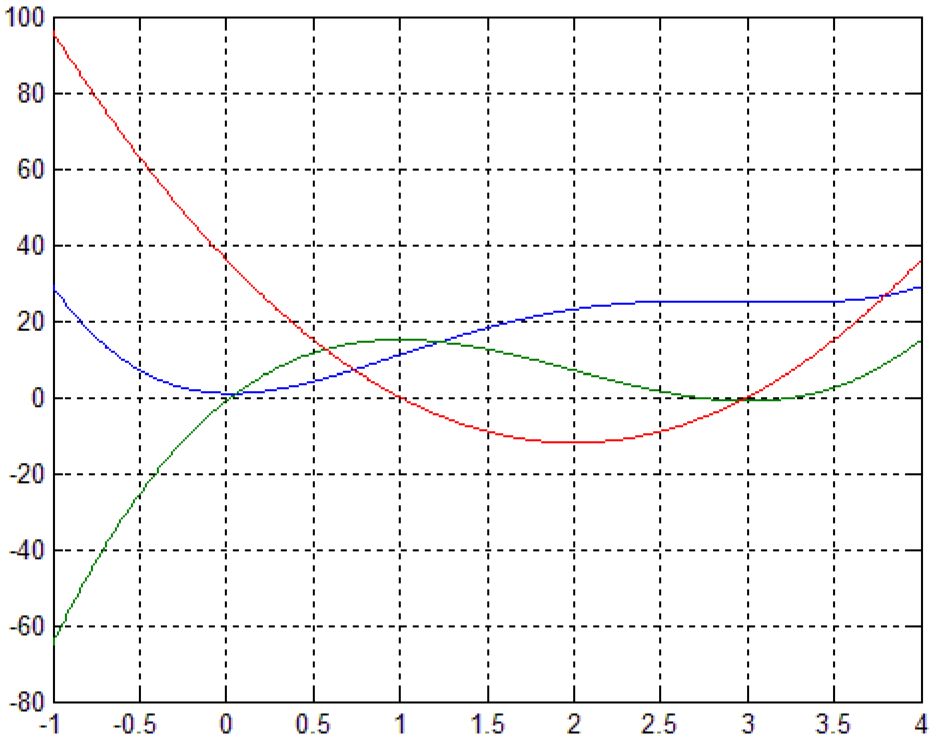
I grafen för skillnaden $\Delta f_2'(x)$ kan man upskatta det största felet till: $\Delta f_{2MAX}' \approx -2{,}7 \cdot 10^{-4}$



II. Grafisk analys av funktioner

I denna uppgift skulle vi utföra givna kommandorader i MATLAB och genom att studera graferna som plottades bestämma vilken funktion som tillhörde vilken grad av derivata.

Nedan syns grafen som MATLAB plottade åt oss:



Vi antog att kurvorna var polynom av växande grad.

Funktionen: $f(x)=x^n$ (ett polynom av graden n) har derivatan:

$$f'(x)=n \cdot x^{n-1}$$

Detta betyder att för varje derivering man utför så minskar graden ett steg.

Vi undersökte sedan hur många extrempunkter de tre polynomen hade. Detta gav oss tre extrempunkter för den blå grafen, två extrempunkter för den gröna grafen samt en extrempunkt för den röda. Detta implicerar att bå grafen är en grad högre än den gröna och den gröna är en grad högre än den röda, d.v.s. den röda funktionen är derivata till den gröna och den gröna funktionen är derivata till den blå.

$$f(x)=P_{blå}(x)$$

$$f'(x)=P_{grön}(x)$$

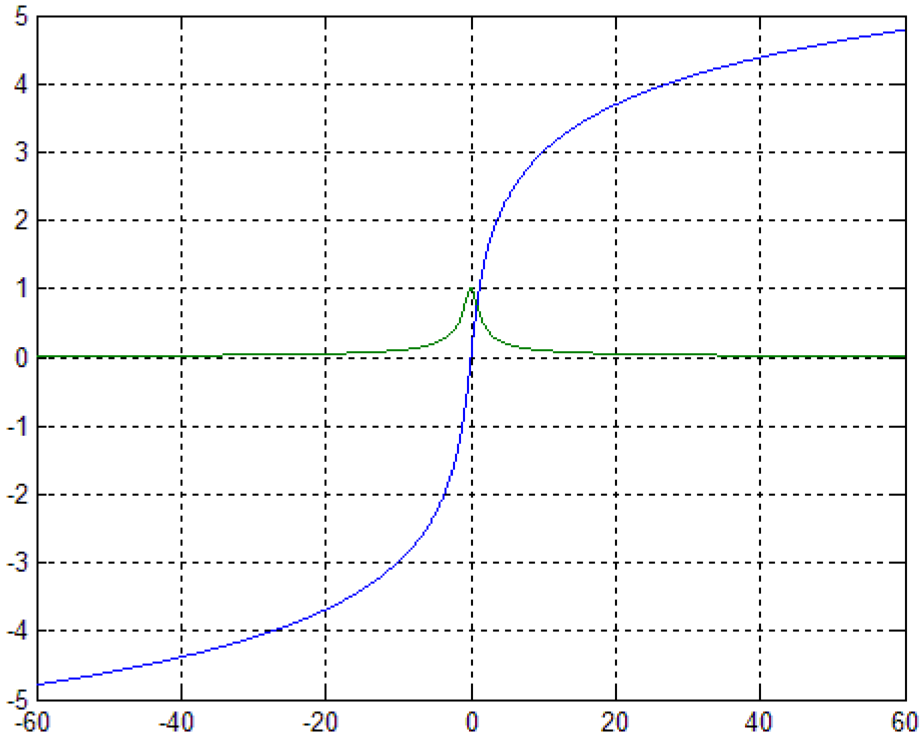
$$f''(x)=P_{röd}(x)$$

III. Derivator och kontinuitet för tre givna funktioner

I denna uppgift skulle vi analysera tre funktioner ur övningshäftet. Vart funktionerna var deriverbara och kontinuerliga skulle bestämmas. En funktion säges vara kontinuerlig om den är kontinuerlig i varje punkt där den är definierad.

Funktionerna deriverades och plottades tillsammans med derivatan för att få en bättre översikt av deras beteenden.

Första funktionen vi skulle analysera var: $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$



Den blå grafen representerar funktionen:

$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

Den gröna grafen representerar derivatan:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

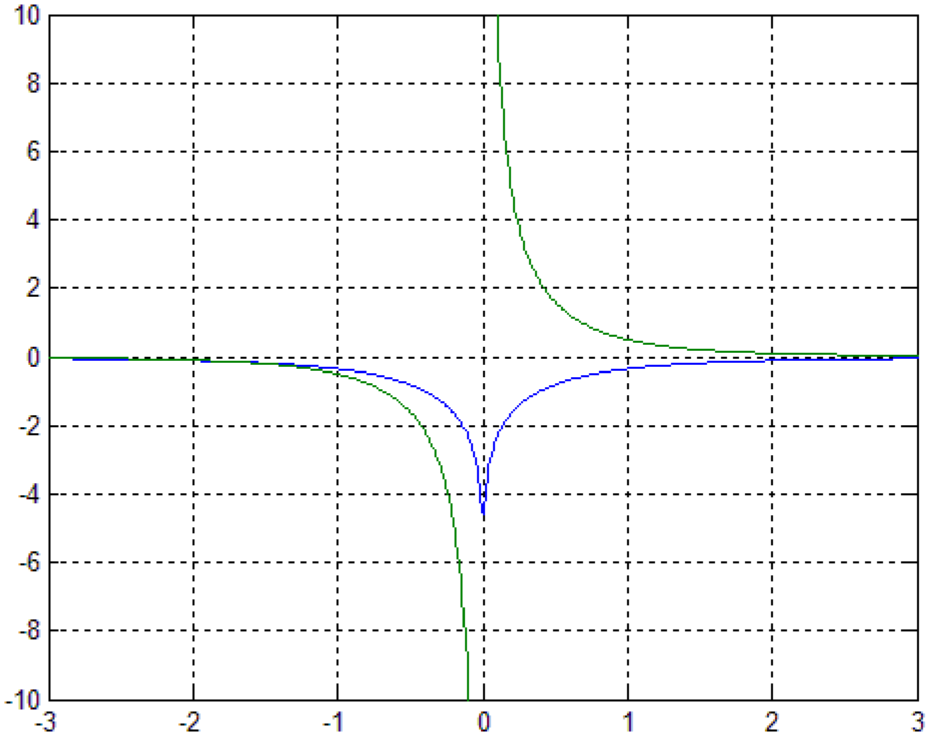
Funktionen definierad då $x\in\mathbb{R}$ vilket implicerar att f(x) är kontinuerlig i alla punkter. Kurvan är slät och detta betyder att den ej har några kantiga hörn, detta säger oss att den är deriverbar i alla punkter.

$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ Kontinuerlig och deriverbar i alla punkter.

Derivatan definierad då $x\in\mathbb{R}$ vilket implicerar att även den är kontinuerlig i alla punkter. Av funktionen följer att derivatan är slät och även den deriverbar.

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ Kontinuerlig och deriverbar i alla punkter.

Andra funktionen vi skulle analysera var: $f(x)=\ln(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}})$



Den blå grafen representerar funktionen:

$$f(x)=\ln(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}})$$

Den gröna grafen representerar derivatan:

$$f'(x)=\frac{1}{x(1+x^2)}$$

$\lim_{x\to 0^{vänster}} \ln(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}})=-\infty$ Gränsvärdet för f(x) då x går mot 0 från vänster.

$\lim_{x\to 0^{höger}} \ln(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}})=-\infty$ Gränsvärdet för f(x) då x går mot 0 från höger.

$\lim_{x\to 0^{vänster}} f'(x)=\frac{1}{x(1+x^2)}=-\infty$ Gränsvärdet då f'(x) går mot 0 från vänster.

$\lim_{x\to 0^{höger}} f'(x)=\frac{1}{x(1+x^2)}=+\infty$ Gränsvärdet då f'(x) går mot 0 från höger.

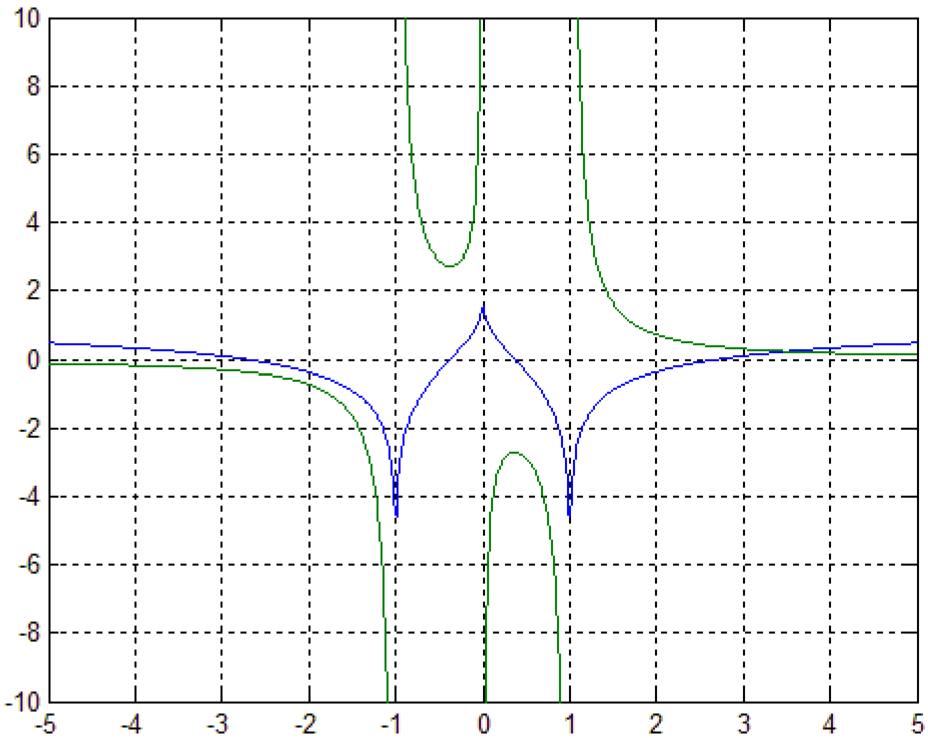
Denna funktion är diskontinuerlig i x = 0. Funktionen avtar mot oändligheten i x = 0, detta ger att den inte är deriverbar i denna punkt. I övrigt är den deriverbar, slät och kontinuerlig.

Derivatan till funktionen är även den diskontinuerlig i x = 0. För alla $x \neq 0$ är derivatan kontinuerlig och deriverbar.

$f(x) = \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ Icke deriverbar och diskontinuerlig i x = 0.

$f'(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ Derivatan icke deriverbar och diskontinuerlig i x = 0.

Den tredje funktionen vi skulle analysera var: $f(x) = \ln|\ln|x||$



Den blå grafen representerar funktionen:

$f(x) = \ln|\ln|x||$

Den gröna grafen representerar derivatan:

$f'(x) = \frac{1}{x|\ln|x||}$

Funktionen är kontinuerlig i alla punkter förutom då $x = \{-1, 0, 1\}$. I dessa punkter avtar eller växer f(x) mot oändligheten vilket implicerar att den inte heller är deriverbar i $x = \{-1, 0, 1\}$. För alla andra x är funktionen deriverbar och kontinuerlig.

Diskontinuiteter för f(x):

$\lim_{x \to |1|} f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln|x|} = -\infty$ Då x närmar sig |1| från båda hållen så går f(x) mot -∞.

$\lim_{x \to 0} f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln|x|} = +\infty$ Då x närmar sig 0 från båda hållen så går funktionen mot +∞.

Av funktionen följer att är kontinuerlig för alla punkter då $x \neq \{-1, 0, 1\}$. Derivatan avtar eller stiger från oändligheten i dessa punkter och som känt är ett oändlighetsställe ej deriverbart.

Diskontinuiteter för f'(x):

$\lim_{x \to -1^{vänster}} f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln|x|} = -\infty$ Då x närmar sig -1 från vänster går derivatan mot värdet -∞.

$\lim_{x \to -1^{höger}} f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln|x|} = -\infty$ Då x närmar sig -1 från höger går derivatan mot värdet -∞.

$\lim_{x \to 0^{vänster}} f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln|x|} = +\infty$ Då x närmar sig 0 från vänster går derivatan mot värdet +∞.

$\lim_{x \to 0^{höger}} f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln|x|} = +\infty$ Då x närmar sig 0 från höger går derivatan mot värdet +∞.

$\lim_{x \to 1^{vänster}} f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln|x|} = -\infty$ Då x närmar sig 1 från vänster går derivatan mot värdet -∞.

$\lim_{x \to 1^{höger}} f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln|x|} = +\infty$ Då x närmar sig 1 från höger går derivatan mot värdet +∞.

IV. Numeriskt beräknad derivata av tredje grad

Denna uppgift gick ut på att beräkna tredjederivatan av funktionen $f(x)=x\cdot e^x$ numeriskt.

För att lösa uppgiften använde vi derivatans definition:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Förstaderivatan av derivatans definition ger andraderivatan av en funktion f:

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

Utveckling och förenkling av andraderivatan:

$$f''(x)=\frac{f(x+2\mathrm{h})-f(x+h)-(f(x+h)-f(x))}{h^2}=\frac{f(x+2\mathrm{h})-2\cdot f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

Derivering en gång till för tredjederivatan till en funktion f:

$$f'''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x+2\mathrm{h})-2\cdot f(x+h)+f(x)}{h^2}\right)$$

Utveckling ger:

$$f'''(x)=\frac{f(x+3\mathrm{h})-f(x+2\mathrm{h})-2(f(x+2\mathrm{h})-f(x+h))+(f(x+h)-f(x))}{h^3}$$

Förenkling ger sedan:

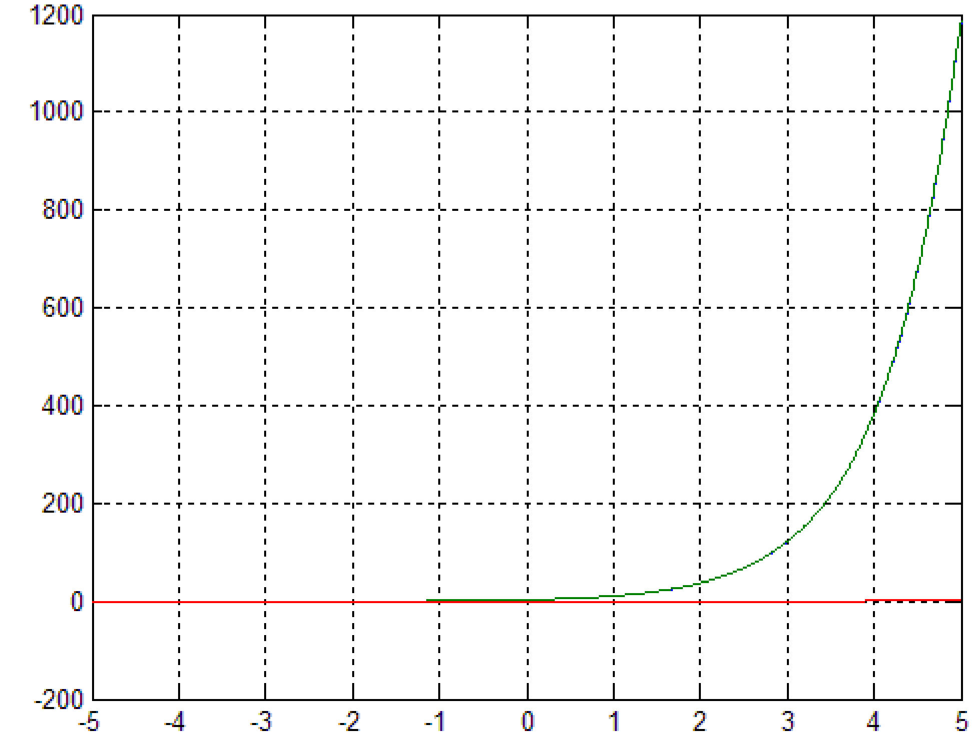
$$f'''(x)=\frac{f(x+3\mathrm{h})-3\cdot f(x+2\mathrm{h})+3\cdot f(x+h)-f(x)}{h^3}$$

Den äkta tredjederivatan beräknades för hand med hjälp av produktregeln:

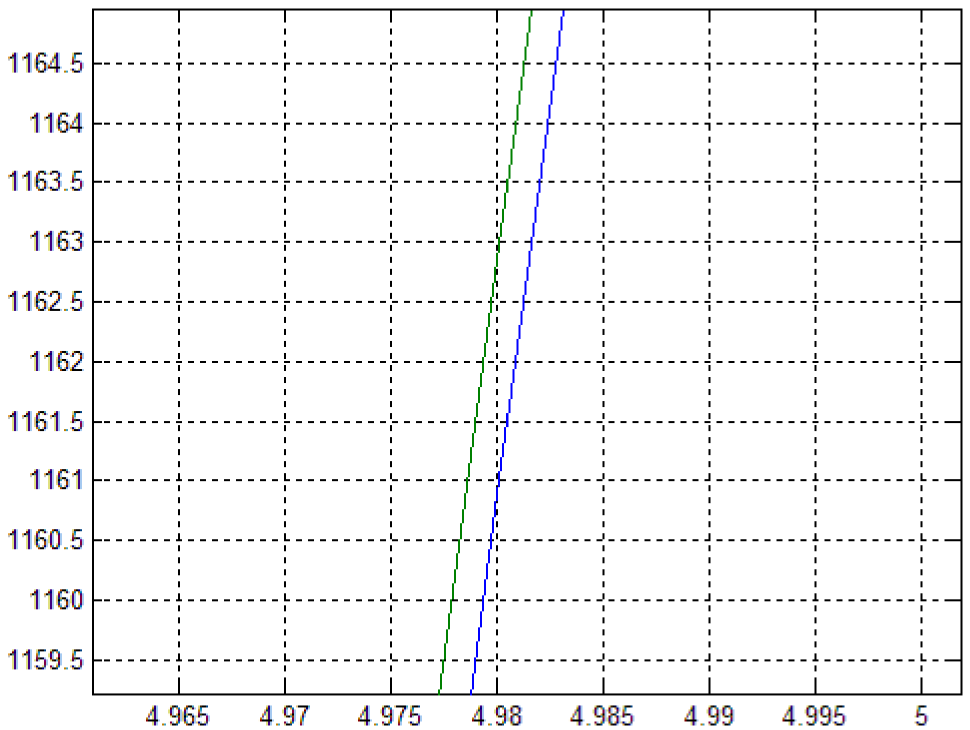
$$\begin{aligned}f(x)&=x\cdot e^x\\ f'(x)&=1\cdot e^x+x\cdot e^x=e^x(1+x)\\ f''(x)&=e^x+e^x+x\cdot e^x=e^x(2+x)\\ f'''(x)&=2e^x+e^x+x\cdot e^x=e^x(3+x)\end{aligned}$$

Den approximerade derivatan och den äkta tredjederivatan syns i Figur 1.5 på nästa sida. Skillnaden är plottad i samma graf med en röd linje för att visa att den är väldigt liten i detta fall. I en förstoring (Figur 1.6) kan man se att den approximerade derivatan (grön linje) ligger till vänster om den äkta derivatan (blå linje), detta beror på att vi har använt en högerderivata för att lösa uppgiften.

Figur 1.5



Figur 1.6



V. Källförteckning

Analys i en variabel, Persson och Böiers, ISBN 91-44-02056-2

Övningar i Analys i en variabel, Lunds tekniska högskola.

Envariabelsanalys 5B1147, kurs på KTH, kurshemsida:

http://math.kth.se/courses/5B1147/IT/200607/

http://www.wikipedia.org

VI. Bilagor

MATLAB kod tillhörande: Approximerad derivata av arcustangenten

```
%Funktionen f(x)..
f = inline('atan(2*x)', 'x');

%värden på x.
x = -2:0.01:2;

%h's värde.
h = 0.01;

%Riktiga derivatan av arctan
realdf = 2./(1+4*x.^2);

%Aprox. deriv. atan.
df = (f(x+h)-f(x))/h;

%Medelvärdet av derivatorna.
df2 = ((f(x+h)-f(x-h))/(2*h));

%Aarctans...
figure(1)
plot(x,df, x,realdf)
grid

%Skillnaden.
figure(2)
plot(x, df-realdf)
grid

%Medelvärdet av derivatan
figure(3)
plot(x, df2)
grid

%Skillnaden mellan riktiga och medelvärdet.
figure(4)
plot(x, df2-realdf)
grid
```

MATLAB kod tillhörande: Grafisk analys av funktioner

```
f=inline('polyval([1 -8 18 -1 1],x)','x')

%Värden på x.
x=-1:0.01:4;
%Värde på h.
h=0.01;

%Derivatan av polynomet
df=(f(x+h)-f(x-h))/(2*h);

%Derivatan av derivatan av polynomet.
ddf=(f(x+h)-2*f(x)+f(x-h))/(h^2);

%Plotta ut fuktionerna.
plot(x,f(x),x,df,x,ddf),grid
```

MATLAB kod tillhörande: Derivator och kontinuitet för tre givna funktioner

```
%Första funktionen f(x)
f = inline ('log(x + sqrt(1 + x.^2))', 'x');

%Andra funktionen g(x)
g = inline ('log(abs(x)./(sqrt(1+x.^2)))', 'x');

%Tredje funktionen v(x)
v = inline ('log(abs(log(abs(x))))','x');

x = -60:0.01:60;        %X-intervall för f
x2 = -5:0.01:5;       %X-intervall för g
x3 = -15:0.01:15;       %X-intervall för v

h = 0.00001;


df = (f(x+h)-f(x))/h;   %Derivatan för f
dg = (g(x2+h)-g(x2))/h; %Derivatan för g
dv = (v(x3+h)-v(x3))/h; %Derivatan för v

%Plotta f = blå, df = grön
figure(1)
plot(x, f(x), x,df);
grid

%Plotta g = blå, dg = grön
figure(2)
plot(x2,g(x2), x2, dg);
axis([-3 3 -10 10])
grid

%Plotta v = blå, dv = grön
figure(3)
plot(x3,v(x3), x3, dv);
axis([-15 15 -15 15])
grid
```

MATLAB kod tillhörande: Numeriskt beräknad derivata av tredje grad

```
%Funktionen
f = inline('x.*exp(x)','x');

%Derivatan till funktionen enligt det exakta uttrycket på derivatan.
g = inline('exp(x)+x.*exp(x)', 'x');

%Andraderivatan till funktionen enligt det exakta uttrycket på derivatan.
p = inline('exp(x)+exp(x)+x.*exp(x)', 'x');

%Tredjederivatan till funktionen enligt det exakta uttrycket på derivatan.
q = inline('exp(x)+exp(x)+exp(x)+x.*exp(x)', 'x');

%x-värden och h-värden
x = -5:0.01:5;
h = 0.001;

%Derivatan genom derivatans def, medelvärdet.
df = (f(x+h)-f(x-h))/(2*h);

%Andraderivatan.
ddf = ((f(x+h+h)-2*(f(x+h))+f(x))/(h^2));

a = f(x+(3*h));
b = 3*(f(x+(2*h)));
c = 3*(f(x+h));
d = f(x);

dddf = (a-b+c-d)/(h^3);

%Plotta ut den beräknade derivatan.
plot(x, f(x), x, df, x, ddf, x, dddf);

grid

%Plotta ut den riktiga derivatan.
figure(2)
plot(x, f(x), x, g(x), x, p(x), x, q(x));
%axis([-10 5 -2 20])
grid

%Plotta ut bägge tillsammans.
figure (3)
plot(x, q(x), x, dddf, x, dddf-q(x));
%axis([-10 5 -2 20])
grid

%Jämför
figure(4)
plot(x, dddf-q(x))
```