5B1147
Envariabelanalys

MatLab Laboration

Laboration 1 & 4

Gränsvärden & Serier

Adam Eriksson (IT)
adamer@kth.se

Tommy Marshall (IT)
marshall@kth.se

2B1147
Envariabelanalys
Handledare: Karim Daho

Rapport i 5B1147 Envariabelanalys

Innehållsförteckning

Laboration 1 - Gränsvärden

1 Uppgift 10

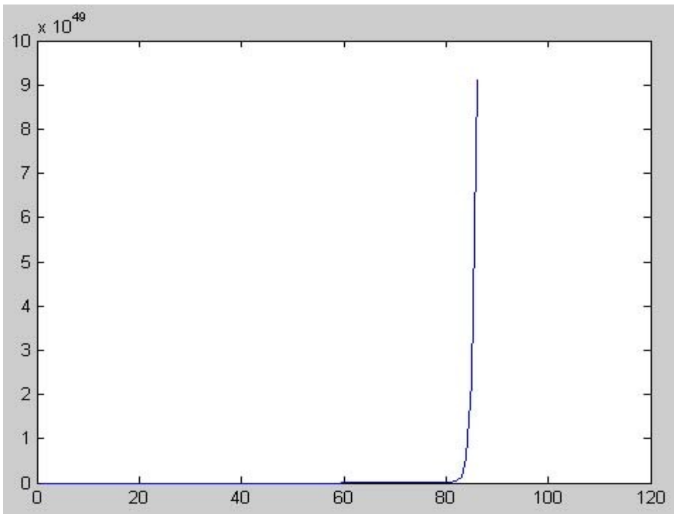
1.1 Problem

Undersök m.h.a. plottning några av gränsvärdena i **Övningsuppgift 2.33**. Försök sedan beräkna gränsvärdena exakt.

Övningsuppgift 2.33

Beräkna

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{2n}{n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{2n}{n}2^{-n}$



Plot 1

1.2 Lösning

Enligt formeln

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

som vi då kan sätta in i våran formel till uppgift a vilket ger:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!}\right)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\to\infty$$

Om man sätter in informationen i formeln: $\binom{n}{k}x^z=\left(\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\right)x^z$

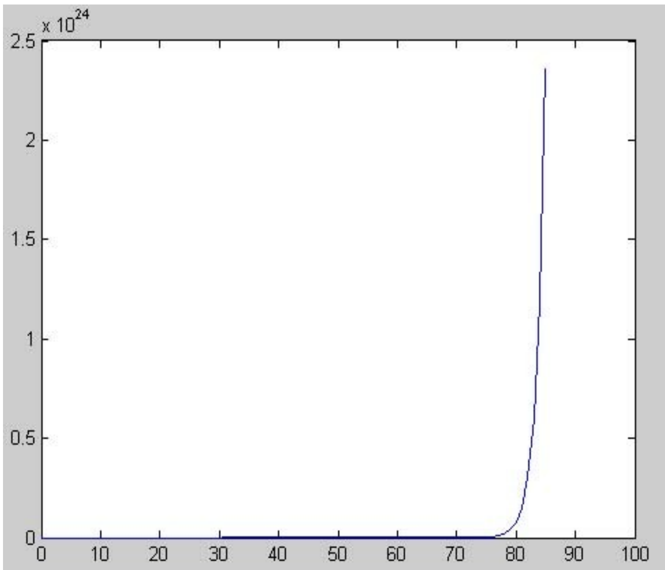
Vilket ger om man sätter in informationen från uppgift b att:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!}\right)2^{-n}\right)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)2^{-n}\to\infty$$

Plot 1 är till uppgift a.

Plot 2 är till uppgift b.

Som man snabbt ser så ökar funktionen kraftigt, och tillslut så blir den oändlig.



Plot 2

1.3 Svar

Uppgift A. Funktionens gränsvärde är lika med = ∞
Uppgift B. Funktionens gränsvärde är lika med = ∞

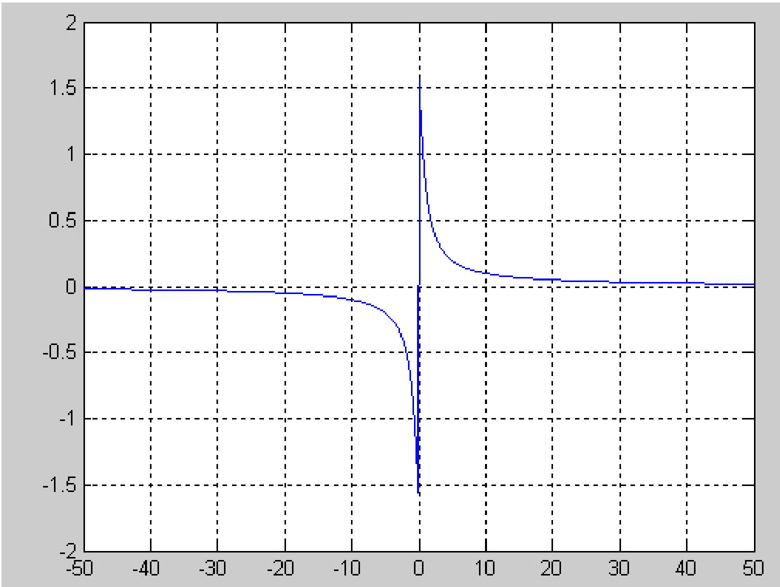
2 Uppgift 11

2.1 Problem

Undersök höger- och vänstergränsvärde i $x=0$ av funktionen $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\neq 0$.

2.2 Lösning

När man sätter in ovanstående funktion i MatLab och sätter x till intervallet $-50\leq x\leq 50$. Detta kan plottas som man ser i **Plot 3**.



Plot 3

Från **Plot 3** kan man se att det finns ett värde där $x\rightarrow 0$, dvs den plats som är så nära noll som möjligt. Detta kan man då få ut genom att ta fram max- och min- värdet från **Plot 3** så kommer man få det värde som är $x\rightarrow 0$.

$\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ där $x\rightarrow 0$ kommer ge $\arctan(\infty)$ då $\frac{1}{x}$ blir så stort att det blir oändligt.

2.3 Svar

Max värdet är: 1,5708

Min värdet är: -1,5608

Max värdet är på höger sida av $x=0$ och min värdet är på vänster sida.

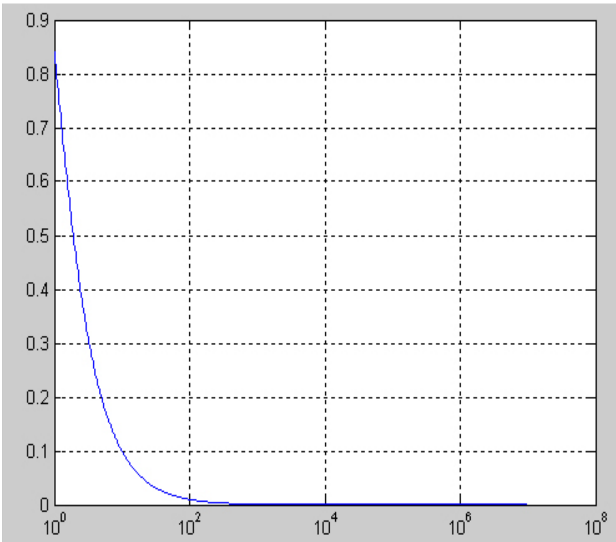
3 Uppgift 12

3.1 Problem

Undersök gränsvärdet $\lim_{x \to 0+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Plotta med logaritmisk skalning av x-axeln. Förklara den bild du får upp.

3.2 Lösning

Om man plottar med logaritmisk skala av ovanstående funktion får man ut **Plot 4**.



Plot 4

3.3 Svar

Vet att $\sin(0)=0$ och $\sin(1)=0{,}841$ eftersom x skall vara positivt så börjar man med $\lim_{x \to 0+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ där $x \to 0$ kommer ge sin(∞) då $\frac{1}{x}$ blir så stort att det blir oändligt. $\sin(\infty)$ går mot 1 och -1.

Vilket man även kan se i **Plot 4**.

4 Uppgift 13

4.1 Problem

Använd uttrycket $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ för att bestämma ett bra närmevärde på e.

4.2 Lösning

För att få fram den naturliga logaritmen e sätter man n går mot +/- ∞ vilket ger att man får funktionen:

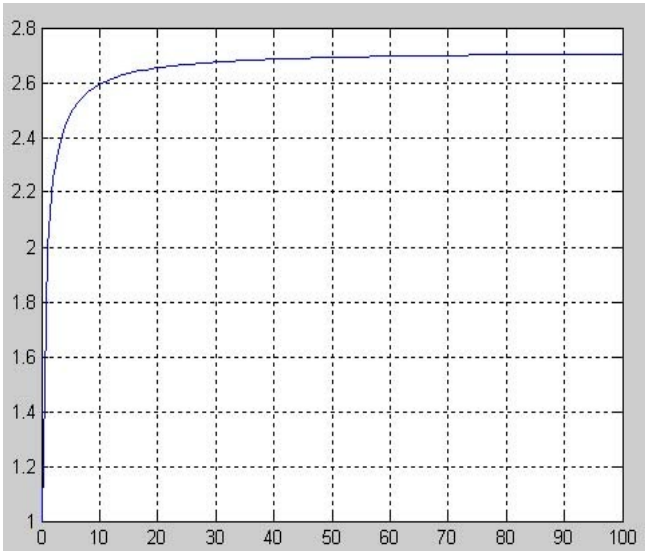
$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

även funktionen

$$e=\lim_{n\to 0}\left(1+n\right)^{\frac{1}{n}}$$

Om man plottar $n\to\infty$ så får man ut nedanstående funktion. Från detta kan man utläsa att e går mot ca 2,7.

Om man sätter in olika värden på x får man:



Plot 5

Olika x värden:	Värde av funktionen
0	1
100	2.70481382942153
200	2.71151712292932
300	2.71376515794278
400	2.71489174438123
500	2.71556852065173
600	2.71602004888065
700	2.71634273772956
800	2.71658484668247
900	2.71677320838041
1000	2.71692393223559

4.3 Svar

Genom att ta fram maxvärdet av **Plot 5** så kan man få ut nämnevärdet. Närmevärde för e: 2,7183

5 Uppgift 14

5.1 Problem

Undersök m.h.a. plottning vad som händer med uttrycket $\sin\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right)$ då

a) x är heltal som går mot oändligheten.
b) x är reella tal som går mot oändligheten.
Förklara eventuella skillnader.

5.2 Lösning

Genom att sätta in ovantsående funktion med de olika alternativen **a** och **b** får man **Plot 6** och **Plot 7**, där **Plot 6** är uppgift **a** och **Plot 7** uppgift **b**.

I **Plot 6** ser man funktionen av heltalet $x = x+1$ som går mot oändligheten.

I **Plot 7** ser man funktionen av reella talet $x = x+\sqrt{2}$ som går mot oändligheten.

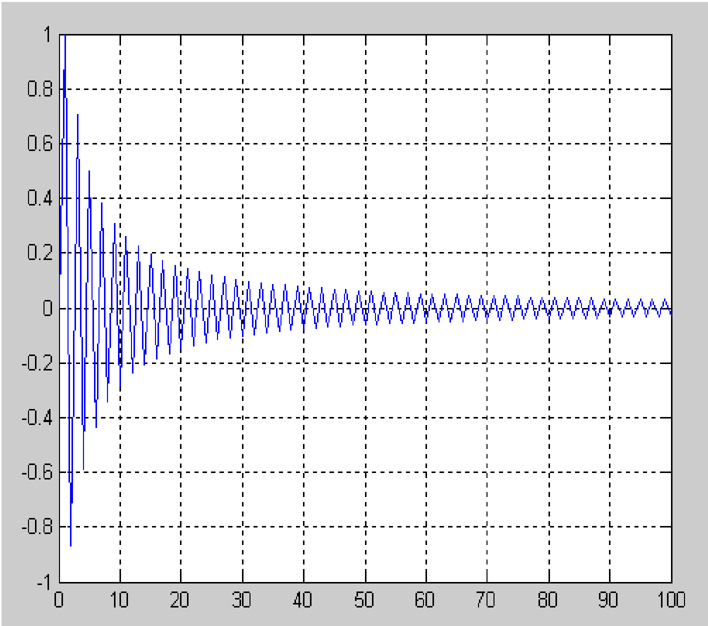
Om man förenklar funktionen så får man:

$$\sin\left(\frac{x(\pi x)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

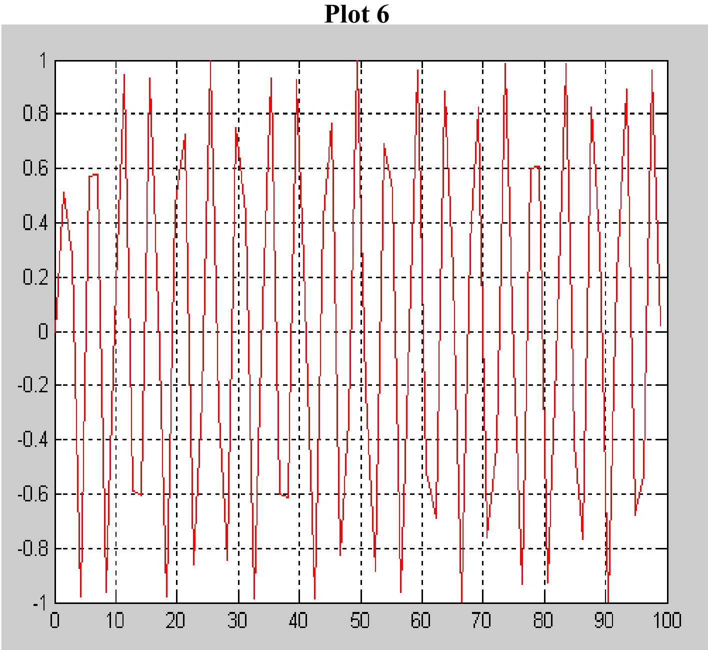
$$\sin\left(\frac{\pi x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

Ger för alla $heltal\ x \to \infty$, kommer att gå mellan π och 2π , vilket kommer ge att funktionen gå mot 0.

För alla $reella\ tal\ x \to \infty$ Då $x = x+\sqrt{(2)}$, aldrig kommer bli heltal så blir det aldrig ex. $\sin(\pi)$ Och det ger då att funktionen varierar mellan 1 och -1.



Plot 6



Plot 7

5.3 Svar

Från **Plot 6** ser man tydligt att funktionen går mot 0.

Från **Plot 7** går funktionen mellan 1 och -1, även om man byter det reella värdet.

Plot 6 ger funktionen $\sin(\pi)$ eller $\sin(-\pi)$ vilket ger $y \to 0$ medans **Plot 7** ger funktionen $\sin(\infty)$ vilket ger y mellan 1 och -1.

Laboration 4 - Serier

6 Uppgift 30

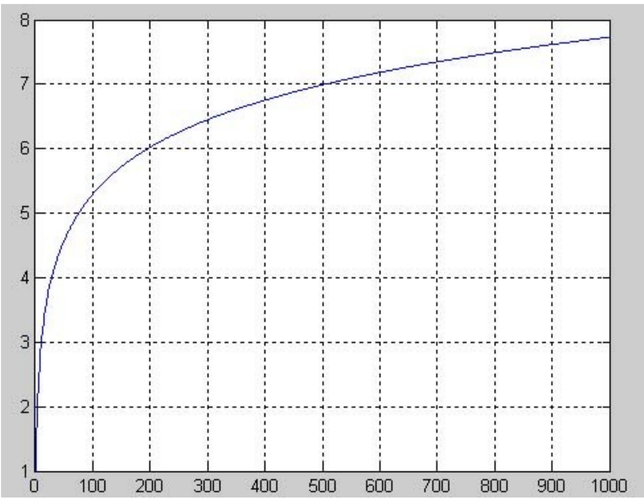
6.1 Problem

Beräkna de tusen första delsummorna till följande serier och försök avgör om de är konvergenta eller divergenta.

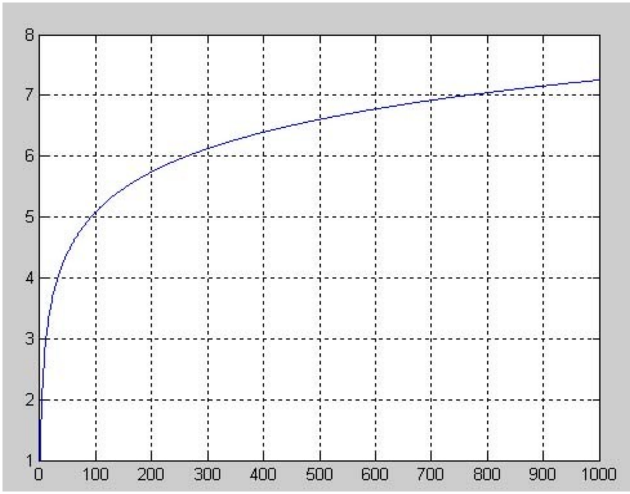
(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{0.99}}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.01}}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} (2\arctan k - \pi)$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

6.2 Lösning

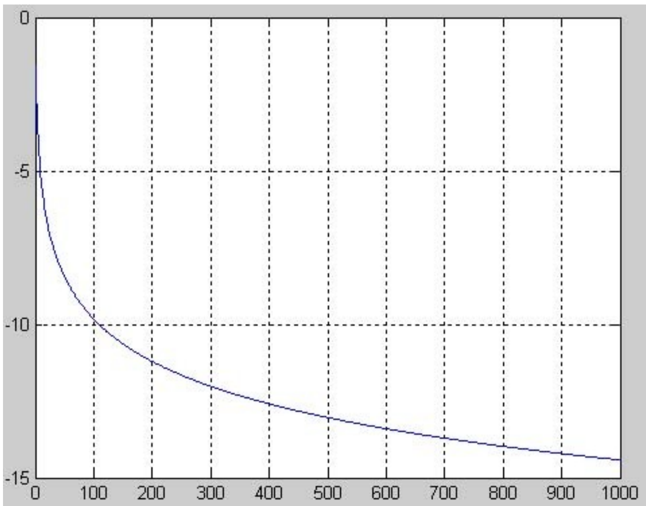
Uppgift a är **Plot 8**, uppgift b är **Plot 9**, uppgift c är **Plot 10**, uppgift d är **Plot 11**.



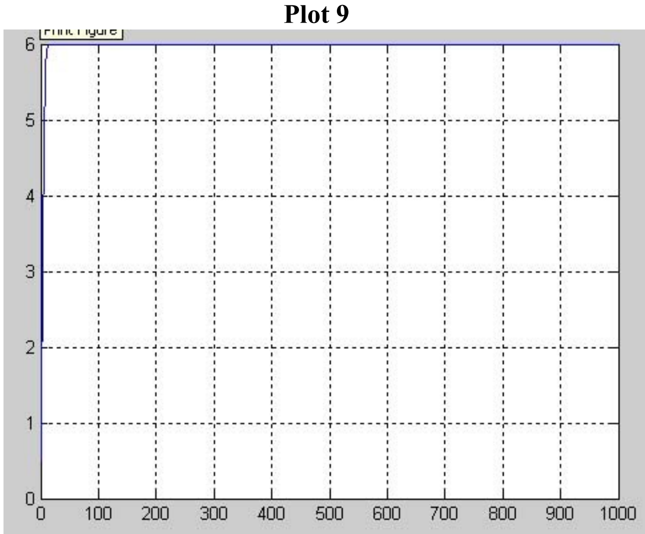
Plot 8



Plot 9



Plot 10



Plot 11

Här har man plottat alla delsummor i de olika uppgifterna. Om vi sätter in de olika x värdena i funktionerna så får vi följande tabell:

X	a	b	c	d
1	1	1	-1.5708	0.5
100	5.2946	5.0835	-9.8236	6
200	6.0203	5.7407	-11.205	6
300	6.4478	6.1237	-12.014	6
400	6.7524	6.3946	-12.589	6
500	6.9893	6.6043	-13.034	6
600	7.1833	6.7753	-13.399	6
700	7.3477	6.9197	-13.707	6
800	7.4902	7.0446	-13.974	6
900	7.6162	7.1547	-14.209	6
1000	7.729	7.253	-14.42	6

Om man jämnför minskningen i de olika uppgifterna så ser man att det är en betydligt större minskning i uppgift b och c jämnfört med uppgift a, medans uppgift d blir konstant. Detta ger då att man kan konstatera att a är divergent då den ökar lite för mycket mot x:s förändring. B, c och d är då alltså konvergenta då dessa är på väg mot en siffra.

6.3 Svar

Detta ger då att:

Uppgift a = divergent.

Uppgift b = konvergent.

Uppgift c = konvergent.

Uppgift d = konvergent.

7 Uppgift 31

7.1 Problem

Använd kommandot sum för att beräkna ett approximativt värde på den konvergenta serien $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$. Beräkna sedan seriens exakta värde m.h.a. formel för geometriska summor.

7.2 Lösning

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{e} \right)^{k} - 1 \right)$$

Gör vi om till den geometriska formeln:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{e} \right)} - 1$$

$$\frac{1}{\left(\frac{e-1}{e} \right)} - 1$$

$$\frac{e}{e-1} - 1$$

Med detta är det bara att räkna ut och få svaret.

7.3 Svar

Summan med hjälp av sum: 0,58198

Med hjälp av geometriska formeln får man: 0,58198

8 Uppgift 32

8.1 Problem

Man kan visa att $\ln(x+1)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ för. Undersök V.L. och H.L. i denna identitet för några olika värden på x. Bekräftar dina iaktagelser att identiteten verkar stämma?

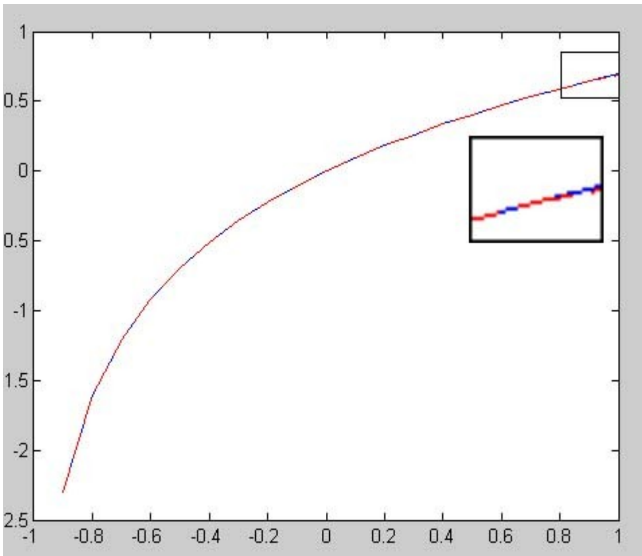
8.2 Lösning

Man räknar ut de olika värdena av V.L och H.L och sedan jämnföra som man kan se här nere under **8.3 Svar**.

8.3 Svar

Man kan ju se att det är en viss skillnad på x = 1 men verkar stämma ganska bra annars. Så skillnaden som man kan se är att det är ett 'lite' större fel vid x = 1 och att på de andra så är det endast så små fel att de är försumbara.

Som man ser i **Plot 14** så är det ett minimalt fel vid x = 1. Där blå är V.L och röd är H.L.



Plot 14

x går mellan -0.9 till 1.

V.L	H.L
-2.30258509299405	-2.30258290563906
-1.6094379124341	-1.60943791242633
-1.20397280432594	-1.20397280432594
-0.916290731874155	-0.916290731874155
-0.693147180559945	-0.693147180559945
-0.510825623765991	-0.510825623765991
-0.356674943938732	-0.356674943938732
-0.22314355131421	-0.22314355131421
-0.105360515657826	-0.105360515657826
0	0
0.0953101798043249	0.0953101798043249
0.182321556793955	0.182321556793955
0.262364264467491	0.262364264467491
0.336472236621213	0.336472236621213
0.405465108108164	0.405465108108164
0.470003629245736	0.470003629245736
0.53062825106217	0.53062825106217
0.587786664902119	0.587786664901218
0.641853886172395	0.641853761017056
0.693147180559945	0.688172179310195

9 Uppgift 33

9.1 Problem

Tag hjälp av Matlab för att besvara frågorna i uppgift **1.29a** ur övningskompendiet 'Övningar i Envariabelanalys'. Gör sedan uppgift **1.29b**.

1.29a) Uttryck log x i ln x

1.29b) Uttryck ²log x i ln x

9.2 Lösning

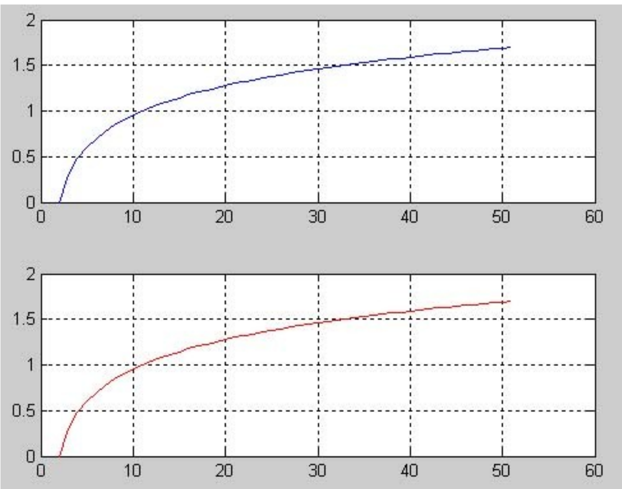
Generell Lösning:

Om man kollar på tabelen till höger för uppgift a så kan man, där $\log_y(x)=1$, förstå att $\ln(x)/\ln(x)$ är samma sak, dvs att om man dividerar alla tal, med det x som man har just på denna plats så får man $\log_y(x)$ uttryckt i $\ln(x)$.

a) Från den generella lösningen får man då ut att

$\log_{10}(x)$ är samma sak som $\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Plot 12, den översta är en funktion av $\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ och den undre är funktionen $lg(x)$, för att bevisa att de är samma.



Plot 12

b) Från den generella lösningen får man då ut att

$\log_2(x)$ är samma sak som $\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$

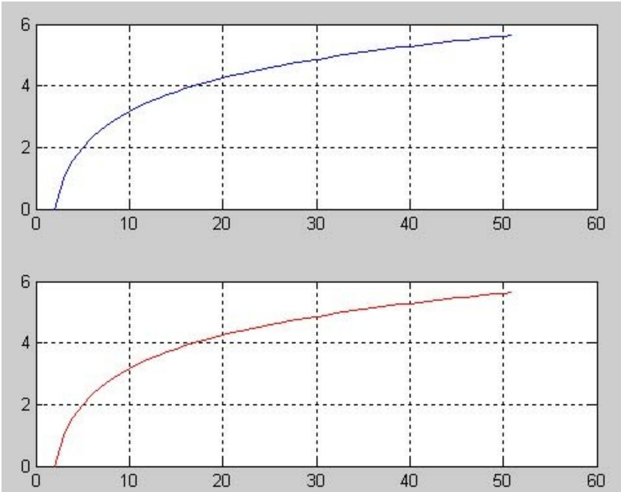
Tabel till uppgift a, där x är mellan 0 och 10

X	Log10	Ln
0	-Inf	-Inf
1,0000	0	0
2,0000	0,3010	0,6931
3,0000	0,4771	1,0986
4,0000	0,6021	1,3863
5,0000	0,6990	1,6094
6,0000	0,7782	1,7918
7,0000	0,8451	1,9459
8,0000	0,9031	2,0794
9,0000	0,9542	2,1972
10,0000	1,0000	2,3026

Tabel till uppgift b, där x är mellan 0 och 10

X	Log2	Ln
0	-Inf	-Inf
1,0000	0	0
2,0000	1,0000	0,6931
3,0000	1,5850	1,0986
4,0000	2,0000	1,3863
5,0000	2,3219	1,6094
6,0000	2,5850	1,7918
7,0000	2,8074	1,9459
8,0000	3,0000	2,0794
9,0000	3,1699	2,1972
10,0000	3,3219	2,3026

Plot 13, den översta är en funktion av $\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ och den undre är funktionen $lg(x)$, för att bevisa att de är samma.



Plot 13

9.3 Svar

a) $lg(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

b) $lg(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$