

Mariana Dalarsson, ME1 & Johan Svenonius, IT1
mdtoppen@yahoo.se / sveno@kth.se

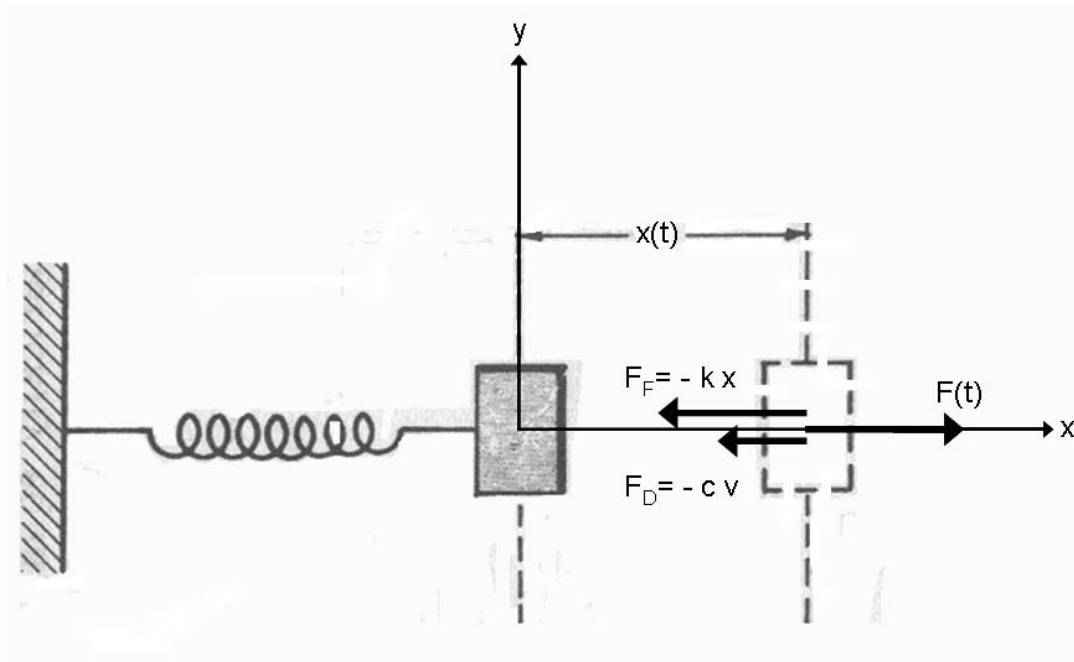
Envariabelanalys 5B1147 - Matlablaboration

2007-02-12

Kurs: 5B1147
Handledare: Karim Dahou

Uppgift 1

Situationen kan illustreras med följande figur:



Följande krafter verkar på kroppen med massan m:

$$F_{\text{Fjäder}} = -kx(t) \quad (1.1)$$

$$F_{\text{Dämpning}} = -cv = -cx'(t) \quad (1.2)$$

$$F(t) = a \cdot \cos(\omega t) \quad (1.3)$$

Uppgift 2

Enligt Newtons andra lag kan vi skriva följande ekvation:

$$ma_x = mx''(t) = F(t) - kx(t) - cx'(t) \quad (2.1)$$

vilket kan skrivas om som:

$$x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (2.2)$$

Om vi benämner

$$\frac{c}{m} = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{c}{2m}, \quad \frac{k}{m} = \mu^2 \Rightarrow \mu = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \frac{F(t)}{m} = f(t) \quad (2.3)$$

kan vi skriva:

$$x'' + 2\lambda x' + \mu^2 x = f(t) \quad (2.4)$$

För $f(t) = 0$, ingen extern kraft, gäller den homogena ekvationen:

$$x'' + 2\lambda x' + \mu^2 x = 0 \quad (2.5)$$

Detta är en differentialekvation vars karakteristiska ekvation kan lösas enligt följande:

$$k^2 + 2\lambda k + \mu^2 = 0 \quad (2.6)$$

Lösningarna till den karakteristiska ekvationen är följande

$$k_{1/2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \quad (2.7)$$

Vi kan nu skilja på fyra olika lösningstyper beroende på värdena av konstanterna λ och μ . Dessa lösningstyper med motsvarande lösningar till den karakteristiska ekvationen är:

1. Överkritisk dämpning med $\lambda > \mu$

$$k_{1/2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} = -\lambda \pm \varphi, \quad \varphi = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} > 0 \quad (2.8)$$

2. Kritisk dämpning med $\lambda = \mu$

$$k_1 = k_2 = -\lambda \quad (2.9)$$

3. Odämpad harmonisk svängning med $\lambda = 0$

$$k_{1/2} = \pm \sqrt{-\mu^2} = \pm i\mu, \quad \mu > 0 \quad (2.10)$$

4. Dämpad harmonisk svängning med $0 < \lambda < \mu$

$$k_{1/2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} = -\lambda \pm i\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2} > 0 \quad (2.11)$$

Låt oss nu hitta lösningar till den homogena ekvationen med $f(t) = 0$, för dessa fyra olika fall.

Lösning 1 – Överkritisk dämpning

I detta fall blir både k_1 och k_2 reella, $k_1 \neq k_2$. Lösningen till differentialekvationen blir därför:

$$x_H(t) = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t} \quad (2.12)$$

Insättning av värdena för k_1 och k_2 ger:

$$x_H(t) = Ae^{-\lambda + \varphi t} + Be^{-\lambda - \varphi t} \quad (2.13)$$

eller

$$x_H(t) = e^{-\lambda t} [Ae^{\varphi t} + Be^{-\varphi t}] \quad (2.14)$$

Detta är den allmänna lösningen för godtyckliga initialvillkor. Som ett exempel, skall vi testa den för de specifika värdena $x(0) = x_0$ och $x'(0) = 0$.

$$x(0) = x_0 \Rightarrow A + B = x_0 \quad (2.15)$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow x' = -\lambda e^{-\lambda t} (Ae^{\varphi t} + Be^{-\varphi t}) + e^{-\lambda t} (A\varphi e^{\varphi t} - B\varphi e^{-\varphi t}) = 0. \quad (2.16)$$

Med $x = 0$ blir detta:

$$x'(0) = -\lambda \cdot 1(A + B) + 1 \cdot (A\varphi - B\varphi) = 0 \quad (2.17)$$

Med vetskapen om att $A + B = x_0$, kan vi vidare skriva:

$$x'(0) = -\lambda \cdot x_0 + \varphi(A - B) = 0 \quad (2.18)$$

eller

$$\lambda x_0 = \varphi(A - B) \quad (2.19)$$

eller

$$\frac{\lambda x_0}{\varphi} = A - B \quad (2.20)$$

Från (2.20) kan vi lösa ut 2 uttryck för A och B. Vi börjar med att få fram A genom att addera x_0 till båda leden.

$$A - B + A + B = x_0 + \frac{\lambda x_0}{\varphi} \quad (2.21)$$

B försvinner och vi får:

$$2A = \left(x_0 + \frac{\lambda x_0}{\varphi} \right) \Rightarrow A = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{\lambda x_0}{\varphi} \right) = \frac{x_0}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{\varphi} \right) \quad (2.22)$$

För att få fram B, ersätter vi uttrycket för A i (2.20):

$$A - B = \frac{\lambda x_0}{\varphi} \Rightarrow B = \frac{x_0}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{\varphi} \right) - \frac{\lambda x_0}{\varphi} \quad (2.23)$$

Detta blir vidare:

$$B = x_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\varphi} \right) - x_0 \left(\frac{\lambda}{\varphi} \right) = x_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\varphi} - \frac{\lambda}{\varphi} \right) = \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\varphi} \right) \quad (2.24)$$

Med A och B bestämda, kan vi ersätta dem i (2.14):

$$x_H(t) = e^{-\lambda t} \left[\frac{x_0}{2} (e^{\varphi t} + e^{-\varphi t}) + \frac{\lambda}{\varphi} \cdot \frac{x_0}{2} (e^{\varphi t} - e^{-\varphi t}) \right] \quad (2.25)$$

Slutligen kan vi skriva ett uttryck för $x_H(t)$, enligt följande:

$$x_H(t) = x_0 e^{-\lambda t} \left[\cosh(\varphi t) + \frac{\lambda}{\varphi} \cdot \sinh(\varphi t) \right] \quad (2.26)$$

Lösning 2 – Kritisk dämpning

För $\lambda = \mu$, gäller:

$$k_1 = k_2 = -\lambda \quad (2.27)$$

Lösningen för denna differentialekvation med dubbelrot till den karakteristiska ekvationen, är:

$$x(t) = (At + B) \cdot e^{-\lambda t} \quad (2.28)$$

Derivatan av detta uttryck är:

$$x'(t) = Ae^{-\lambda t} + (At + B) \cdot (-\lambda)e^{-\lambda t} \quad (2.29)$$

vilket kan skrivas om som:

$$x'(t) = e^{-\lambda t} (A - \lambda At - \lambda B) \Rightarrow x'(t) = e^{-\lambda t} [A(1 - \lambda t) - \lambda B] \quad (2.30)$$

För de specifika villkoren $x(0) = x_0$ och $x'(0) = 0$, kan vi få fram A och B enligt följande:

$$x(0) = B = x_0 \quad (2.31)$$

$$x'(0) = A - \lambda B = A - \lambda x_0 = 0 \Rightarrow A = \lambda x_0 \quad (2.32)$$

Med dessa insatta i (2.28) kan vi slutligen få fram:

$$x(t) = (\lambda x_0 t + x_0)e^{-\lambda t} = x_0(1 + \lambda t)e^{-\lambda t} \quad (2.33)$$

Lösning 3 – Odämpad kritisk svängning

För $k_{1/2} = \pm\sqrt{-\mu^2} = \pm i\mu$, $\mu > 0$, gäller följande allmänna lösning:

$$x_H(t) = Ae^{i\mu t} + Be^{-i\mu t} \quad (2.34)$$

För de specifika villkoren $x(0) = x_0$ och $x'(0) = 0$, kan vi få fram A och B enligt följande:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow A + B = x_0 \quad (2.35)$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow i\mu(A - B) = 0 \quad (2.36)$$

Dessa villkor ger vidare:

$$\left. \begin{array}{l} A + B = x_0 \\ A = B \end{array} \right\} \Rightarrow A = B = \frac{x_0}{2} \quad (2.37)$$

Med dessa insatta i (2.34) kan vi slutligen få fram:

$$x(t) = \frac{x_0}{2}(e^{i\mu t} + e^{-i\mu t}) = x_0 \cos \mu t \quad (2.38)$$

Lösning 4 – Dämpad harmonisk svängning

Rötterna i lösningarna till den karakteristiska ekvationen är imaginära. $k_1 \neq k_2$ gäller och $k_{1/2} = -\lambda \pm i\Omega$, $\Omega = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$. Den allmänna lösningen kan fås enligt:

$$x_H(t) = Ae^{(-\lambda - i\Omega)t} + Be^{(-\lambda + i\Omega)t} \quad (2.39)$$

eller

$$x_H(t) = e^{-\lambda t} [Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}] \quad , \quad B = A^* \quad , \quad (2.40)$$

där vi noterar att A och B är komplexa tal. Dessa två komplexa tal är inte helt oberoende av varandra, utan B måste vara lika med A komplext konjugerat för att lösningen $x_H(t)$, som anges i (2.40), skall förbli ett reellt tal.

Detta är den allmänna lösningen för godtyckliga initialvillkor. Vi ska dock testa dem för de specifika värdena $x(0) = x_0$ och $x'(0) = 0$.

$$x(0) = x_0 \Rightarrow A + B = x_0 \quad (2.41)$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow x' = -\lambda e^{-\lambda t} (Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}) + e^{-\lambda t} (Ai\Omega e^{i\Omega t} - Bi\Omega e^{-i\Omega t}) = 0 \quad (2.42)$$

Med $t = 0$ blir detta:

$$x'(0) = -\lambda(A + B) + 1 \cdot (i\Omega A - i\Omega B) = 0 \quad (2.43)$$

Med vetskapen om att $A + B = x_0$, fås följande fram efter viss omskrivning:

$$-\lambda x_0 = i\Omega(A - B) \quad (2.44)$$

eller

$$\frac{-\lambda x_0}{i\Omega} = A - B \quad (2.45)$$

Från (2.45) kan vi lösa ut 2 uttryck för A och B. Vi börjar med att få fram A genom att addera x_0 till båda leden.

$$A - B + A + B = x_0 - \frac{\lambda x_0}{i\Omega} \quad (2.46)$$

B försvinner och vi får:

$$2A = \left(x_0 - \frac{\lambda x_0}{i\Omega} \right) \Rightarrow A = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{\lambda x_0}{i\Omega} \right) = \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{i\Omega} \right) \quad (2.47)$$

För att få fram B, ersätter vi uttrycket för A i (2.45):

$$A - B = \frac{-\lambda x_0}{i\Omega} \Rightarrow B = \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{i\Omega} \right) + \frac{\lambda x_0}{i\Omega} \quad (2.48)$$

Detta blir vidare:

$$B = x_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2i\Omega} \right) + x_0 \left(\frac{\lambda}{i\Omega} \right) = x_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2i\Omega} + \frac{\lambda}{i\Omega} \right) = \frac{x_0}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{i\Omega} \right) = A^* \quad (2.49)$$

Med A och B bestämda, kan vi ersätta dem i (2.40):

$$x_H(t) = e^{-\lambda t} \left[\frac{x_0}{2} \cdot (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) + \frac{\lambda}{i\Omega} \cdot \frac{x_0}{2} (e^{-i\Omega t} - e^{i\Omega t}) \right] \quad (2.50)$$

Slutligen kan vi skriva ett uttryck för $x_H(t)$, enligt följande:

$$x_H(t) = x_0 e^{-\lambda t} \left[\cos \Omega t - \frac{\lambda}{\Omega} \cdot \sin \Omega t \right] \quad (2.51)$$

De typiska lösningarna till den homogena ekvationen (2.5), för $f(t) = 0$, visas i figurerna 1-3 i uppgiften 5 a) nedan. Dessa omfattar överkritisk dämpning, kritisk dämpning och dämpad harmonisk svängning. Lösningen för odämpad harmonisk svängning, med $\lambda = 0$, visas inte eftersom den representeras av en enkel trigonometrisk funktion, som t.ex. $\cos(\mu t)$ i (2.38).

Uppgift 3

När den externa kraften är skild från noll och lika med $f(t) = a \cos \omega t \neq 0$, gäller följande ekvation:

$$x'' + 2\lambda x' + \mu^2 x = a \cos \omega t \quad (3.1)$$

Partikulärlösningen till ekvationen (3.1) beskriver de påtvingade svängningarna och vi kan anta att dessa svängningar har samma frekvens ω som kraften $f(t)$. Därmed kan vi skriva

$$x_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.2)$$

De första och andra derivatorna av funktionen (3.2) är lika med

$$x_p'(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t \quad (3.2)$$

$$x_p''(t) = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t = -\omega^2 x(t) \quad (3.3)$$

Om vi ersätter (3.2)-(3.4) i (3.1) får vi

$$(A(\mu^2 - \omega^2) + 2\lambda\omega B) \cos \omega t + (B(\mu^2 - \omega^2) - 2\lambda\omega A) \sin \omega t = a \cos \omega t \quad (3.4)$$

eller

$$A(\mu^2 - \omega^2) + 2\lambda\omega B = a \quad (3.5)$$

$$B(\mu^2 - \omega^2) - 2\lambda\omega A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\mu^2 - \omega^2}{2\lambda\omega} B \quad (3.6)$$

Om vi nu ersätter (3.6) i (3.5) får vi

$$\frac{(\mu^2 - \omega^2)^2}{2\lambda\omega} B + 2\lambda\omega B = a \quad (3.7)$$

eller

$$B = \frac{2\lambda\omega}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} a \quad (3.8)$$

Från ekvationerna (3.6) och (3.8) erhålles också

$$A = \frac{\mu^2 - \omega^2}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} a \quad (3.9)$$

Om vi nu ersätter (3.8) och (3.9) i (3.2) får vi följande allmänna uttryck för $x_p(t)$:

$$x_p(t) = \frac{a}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} \left[(\mu^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\lambda\omega \sin \omega t \right] \quad (3.10)$$

För $\omega = \mu$ uppstår s.k. resonans, d.v.s. de påtvingade svängningarna har sin största amplitud. Lösningen (3.10) blir då

$$x_p(t) = \frac{a}{2\lambda\omega} \sin \omega t = B \sin \omega t \quad , \quad B = \frac{a}{2\lambda\omega} \quad (3.11)$$

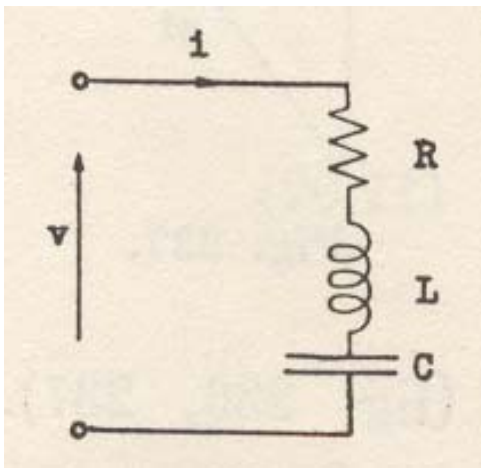
Från resonanslösningen (3.11) ser vi att för $\lambda \rightarrow 0$ (ingen dämpning), så går amplituden av de påtvingade svängningarna mot oändligheten, d.v.s.

$$B = \frac{a}{2\lambda\omega} \rightarrow \infty, \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

De typiska lösningarna till den kompletta ekvationen (2.4), för $f(t) = a \cos \omega t \neq 0$, visas i figurerna 4-9 i uppgiften 5 b) nedan. Dessa lösningar fås som en överlagring av partikulärlösningen (3.10) på den gällande homogena lösningen, beroende av värdena på parametrarna λ och μ .

Uppgift 4

Ett annat exempel på fysikaliska problem som beskrivs av svängningsekvationen (3.1) är en s.k. RLC-krets i kretsteorin. Låt oss anta att en växelspanningskälla $v(t) = V \cos \omega t$ ansluts till en seriekrets med ett motstånd med resistans R , en spole med en induktans L och en kondensator med kapacitans C . Genom seriekretsen går då strömmen $i(t)$. Se bilden nedan.



Enligt spänningslagen är summan av alla spänningar i en sluten krets lika med noll, d.v.s.

$$v(t) - u_R - u_L - u_C = 0 \quad (4.1)$$

Å andra sidan, gäller följande spänning- respektive strömrelationer för motstånd, spolar och kondensatorer:

$$u_R = Ri_R = Ri, \quad u_L = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{di}{dt}, \quad i_C = i = C \frac{du_C}{dt} \quad (4.2)$$

Om vi ersätter i-u relationen för kondensatorer i de två u-i relationerna för motstånd och spolar får vi följande två relationer:

$$u_R = RC \frac{du_C}{dt}, \quad u_L = LC \frac{d^2u_C}{dt^2} \quad (4.3)$$

Från (4.1) med (4.3) erhålles

$$v(t) - RC \frac{du_C}{dt} - LC \frac{d^2u_C}{dt^2} - u_C = 0 \quad (4.4)$$

eller

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{V}{LC} \cos \omega t \quad (4.5)$$

Om vi nu inför följande beteckningar:

$$x(t) = u_c(t) \quad , \quad \lambda = \frac{R}{2L} \quad , \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad a = \frac{V}{LC} \quad (4.6)$$

Kan ekvationen (4.5) reduceras till ekvationen (3.1), d.v.s.

$$x'' + 2\lambda x' + \mu^2 x = a \cos \omega t \quad (4.7)$$

Samtliga lösningar till ekvationen (3.1) enligt ovan, såväl homogena lösningar som partikulärlösningar, gäller även för RLC-kretsekvationen (4.5) med beteckningarna i (4.6). Med andra ord är dessa två fysikaliska problem fullständigt kompatibla med varandra.

Uppgift 5

Vi ska med Matlab studera vad som händer när man varierar konstanterna i svängningsekvationen, $my''(t) + dy'(t) + ky(t) = f(t)$. I våra experiment arbetar vi med funktionen $y''(t) + dy'(t) + ky(t) = \sin(at)$. Till hjälp har vi Matlabs kommando `ode45` som löser differentialekvationer och filen `svfun.m` från kurshemsidan som innehåller högerledsekvationen. För varje uppgift skapar vi också en skriptfil som vi matar med konstanterna för att underlätta arbetet.

a)

Dämpningskonstanten $d = 1$ och drivfunktionen $f(t) = 0$ är givna. Vi ska studera hur många max och min lösningskurvan, $y(t)$, har i intervallet $0 \leq t \leq 100$, när fjäderkonstanten k varierar. Begynnelsevillkoren låter vi vara $y(0) = y'(0) = 1$.

Vi skapar skriptfilen `tryfuna.m`, där vi fyller i värdena för de givna konstanterna d och a , och låter k , som ska varieras, vara inparameter för skriptfilen. Vi anropar så `ode45` med högerledsekvationsfilen, intervallet och begynnelsevillkoren och plottar slutligen:

```
function [ output ] = tryfuna( input )

global DAMPNING FREKVENNS FJADER;
DAMPNING = 1;
FREKVENNS = 0;
FJADER = input;

[ t y ] = ode45('svfun', [0 100], [1;1]);
plot(t, y(:,1));
```

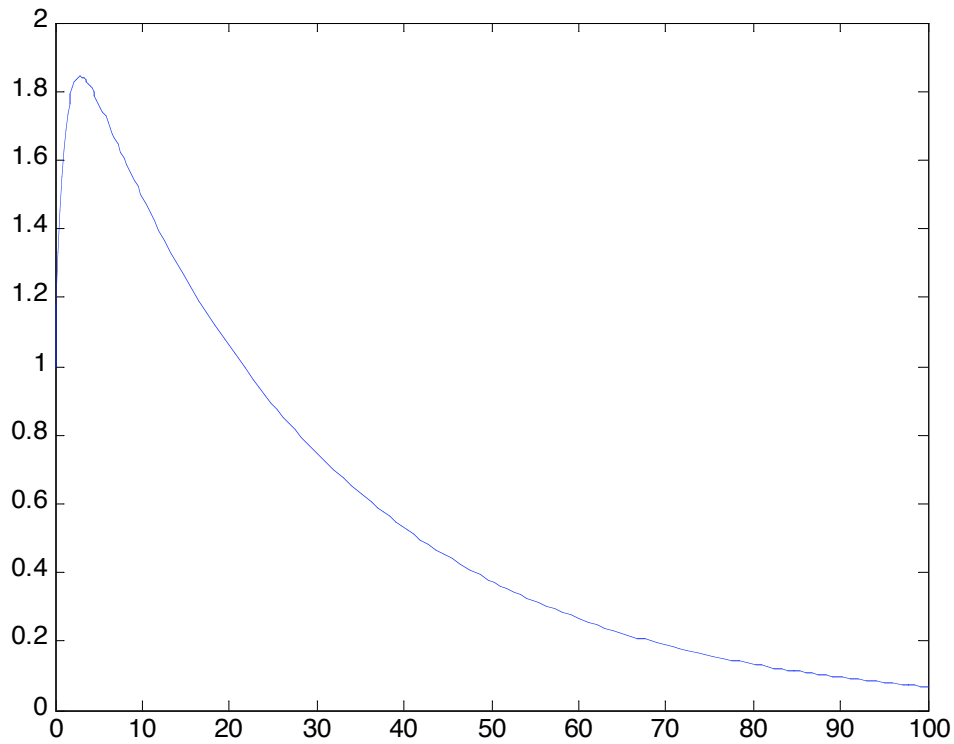
`svfun.m` låter vi vara som den är med undantag för att vi lägger till `k=FJADER;` och kommenterar bort de andra raderna som gör tilldelningar för k .

Genom att anropa `tryfuna` med olika värden för k kan man komma fram till vissa slutsatser.

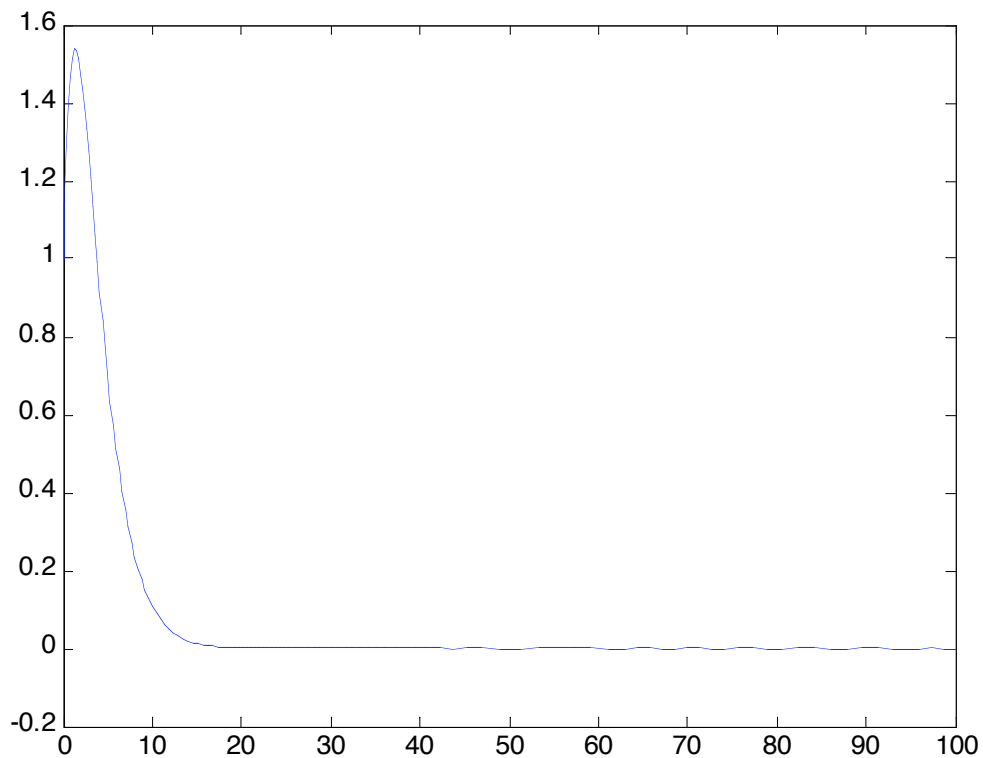
För $k \leq \frac{1}{4}$ går $y \rightarrow 0$ när $t \rightarrow \infty$, detta efter endast ett maximum som beror på valet av

begynnevillkor. För $k > \frac{1}{4}$ får vi istället en oscillerande rörelse med avtagande amplitud.

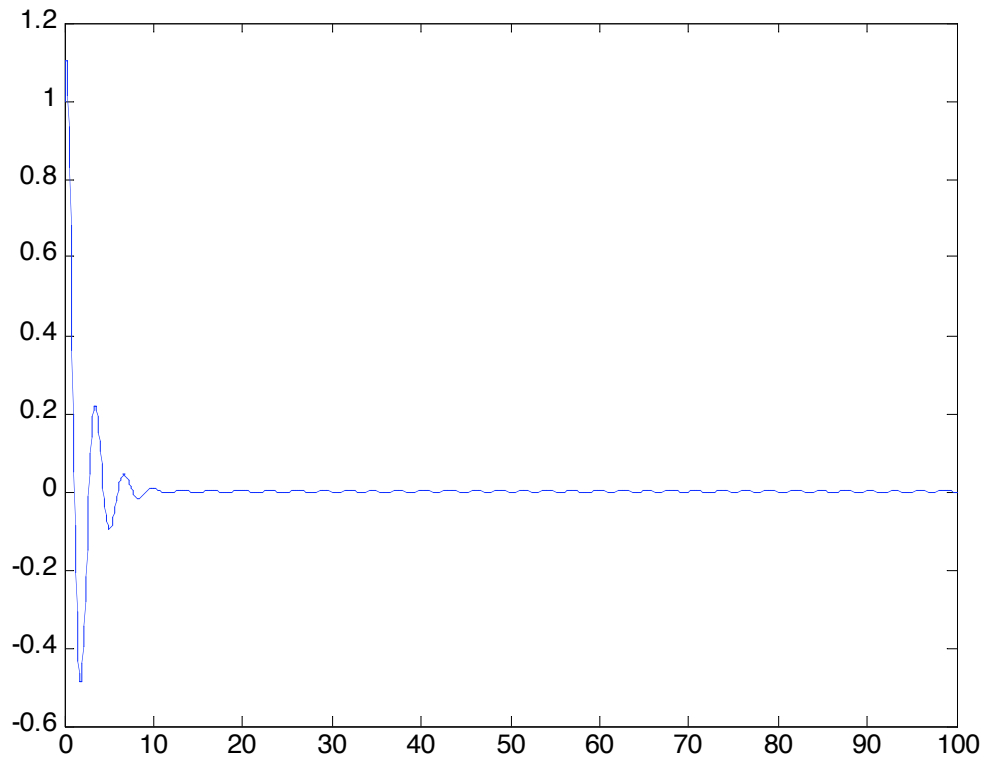
Då har vi ett oändligt antal maxima och minima allteftersom lösningsfunktionen oscillerar. Dessa iakttagelser sammanfattas i ett antal figurer nedan, för olika värden av konstanten k.



Figur 1, k = 1/30



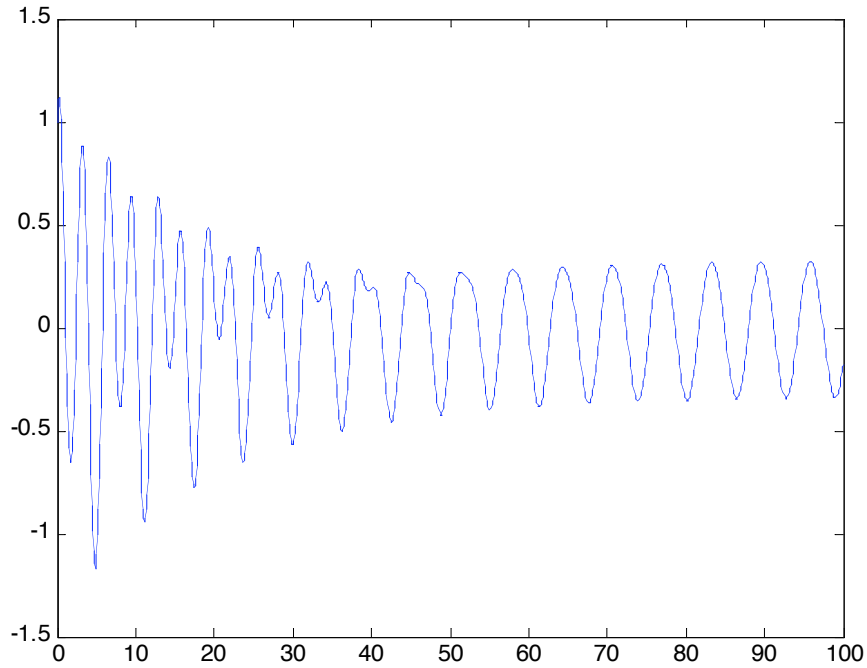
Figur 2, k = 1/4



Figur 3, $k = 4$

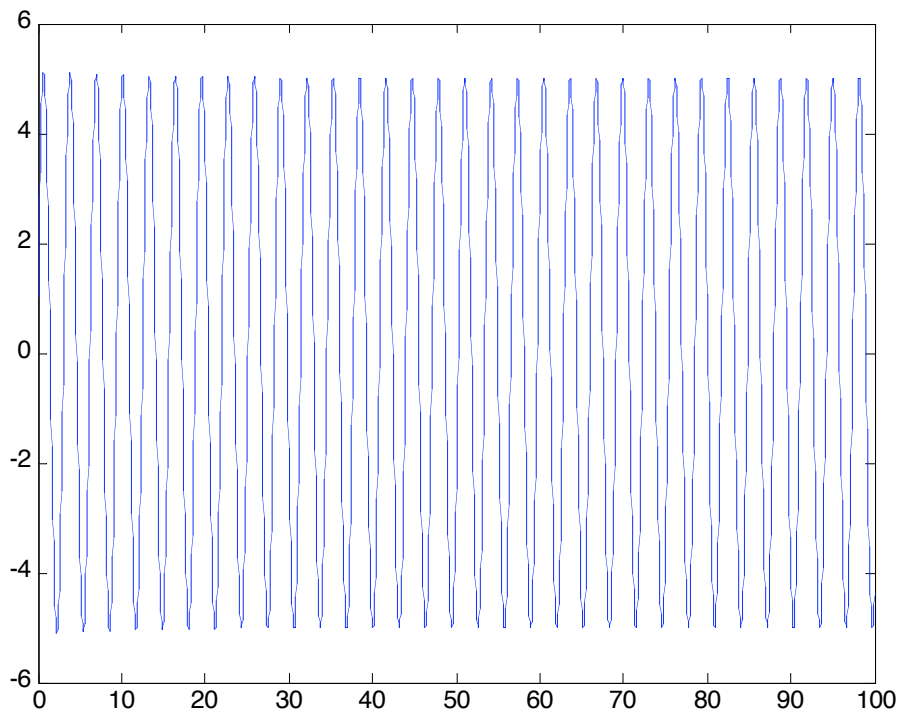
b)

Givet är fjäderkonstanten $k = 4$ och dämpningskonstanten $d = 0.1$. Undersökas ska hur lösningskurvans utseende varierar med frekvensen a i drivfunktionen. I uppgift 3 konstaterade vi att när den yttre, påtvingade kraftens frekvens överensstämmer med systemets egenfrekvens, uppstår resonans. Därför kan vi dra slutsatsen att $a = \sqrt{k} = 2$ bör ge maximalt utslag. Vi testar enligt samma mönster som i uppgift 5a), genom att skriva en motsvarande funktion för att enkelt prova värden. Dessa iakttagelser sammanfattas i ett antal figurer nedan, för olika värden av konstanten a .



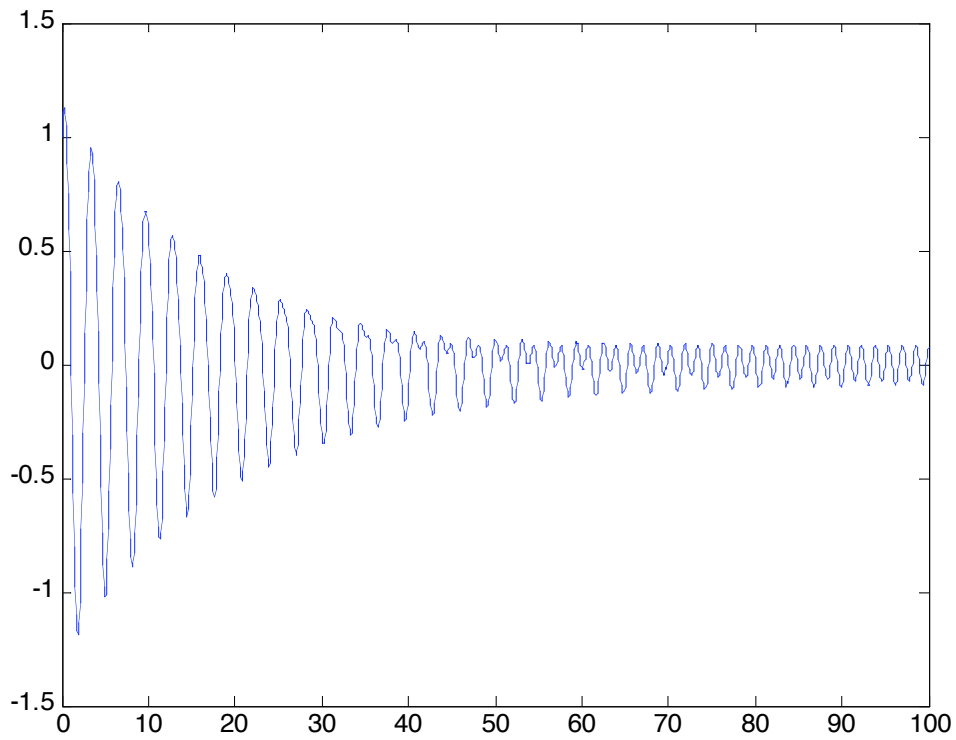
Figur 4. $a = 1$

Likt övriga grafer utom $a = 2$ visar denna svävning.



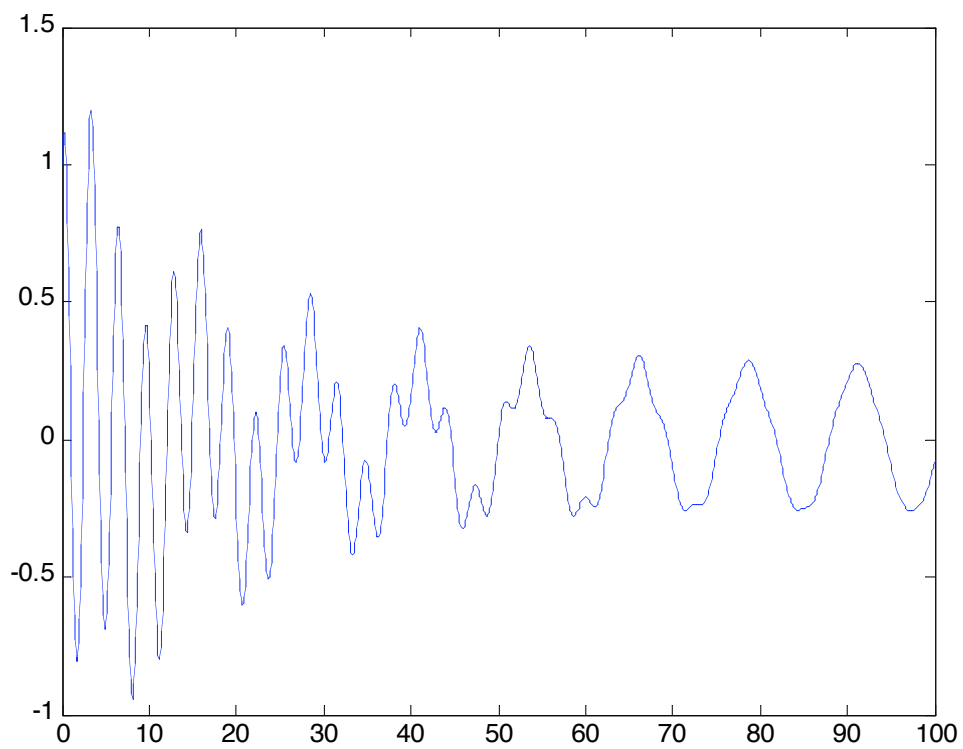
Figur 5. $a = 2$

Detta är resonanssituationen med $k = 4 = a^2$, då man får största möjliga amplitud, samt en dominerande sinusfunktion.

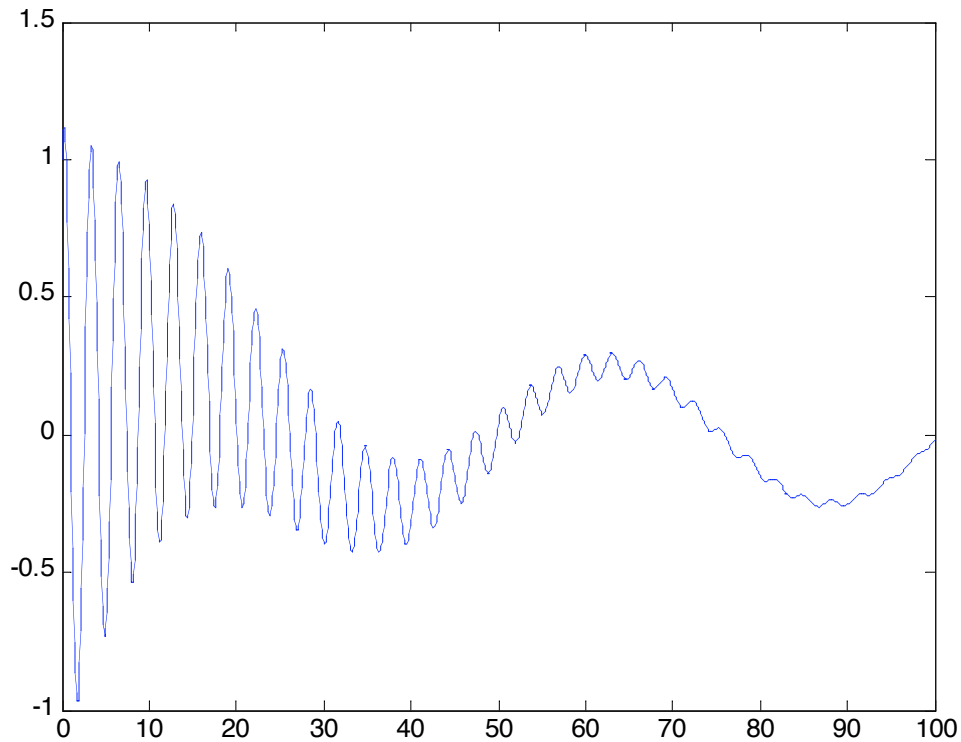


Figur 6. $a = 4$

För a-värdena som är mindre än 1 (< 1), har vi följande grafer:

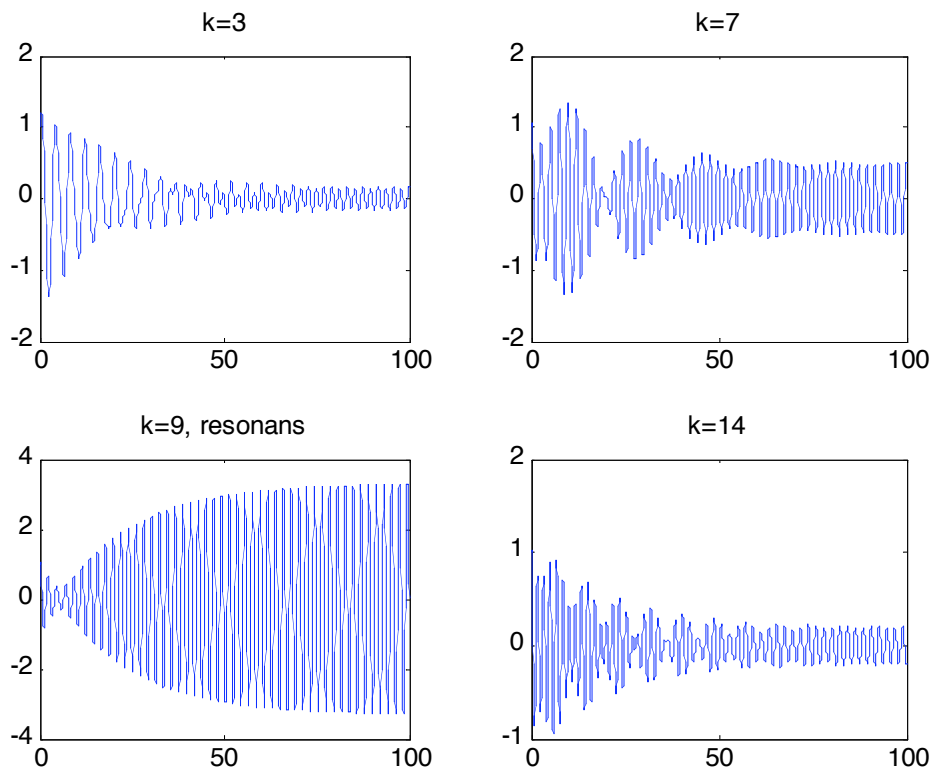


Figur 7. $a = 1/2$



Figur 8. $a = 1/8$

Problemet kan också närmast från andra hållet. Låt $a = 3$, och dämpkonstanten får fortsatt vara $d = 0.1$. Vi har att $a = \sqrt{k} \Leftrightarrow k = a^2 = 9$. I figur X ser vi att svaret stämmer och att svängning uppstår i närliggande fall. Detta visas i Figur 9. nedan.



Figur 9.

c)

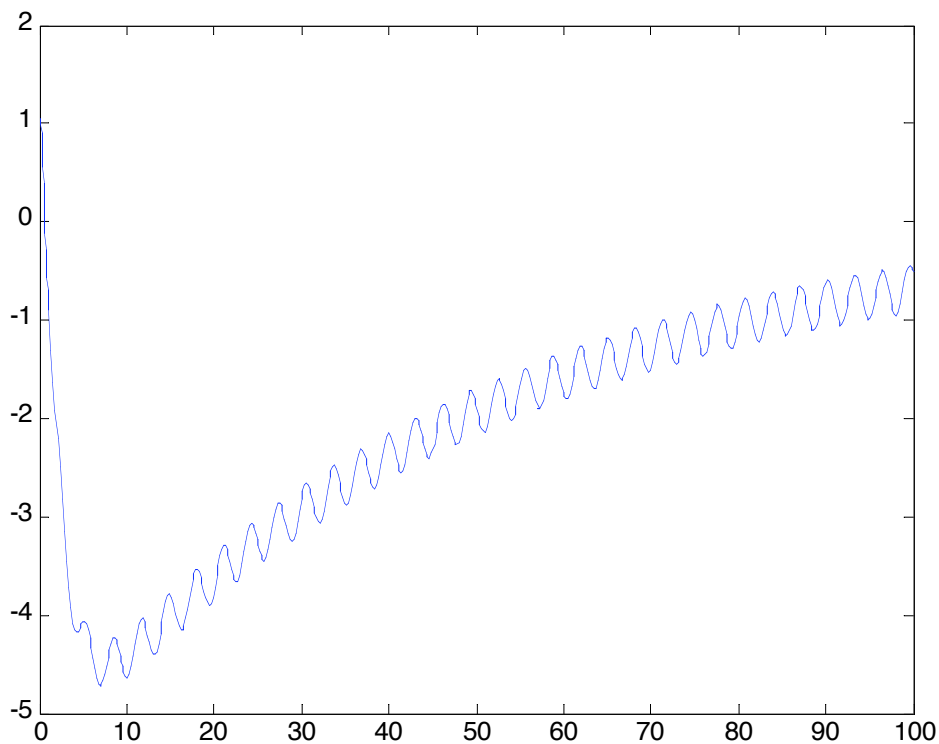
Vi låter $k = 10$ om $y \geq 0$ och $k = 0.01$ om $y < 0$. Samtidigt låter vi $a = 2$ och varierar d mellan 0.5 och 0.05.

För att få k att bero av y skapar vi en ny fil med högerledsekvationer med `svfun.m` som utgångspunkt. Vår kallar den `svfunt.m` och inför dessa ändringar:

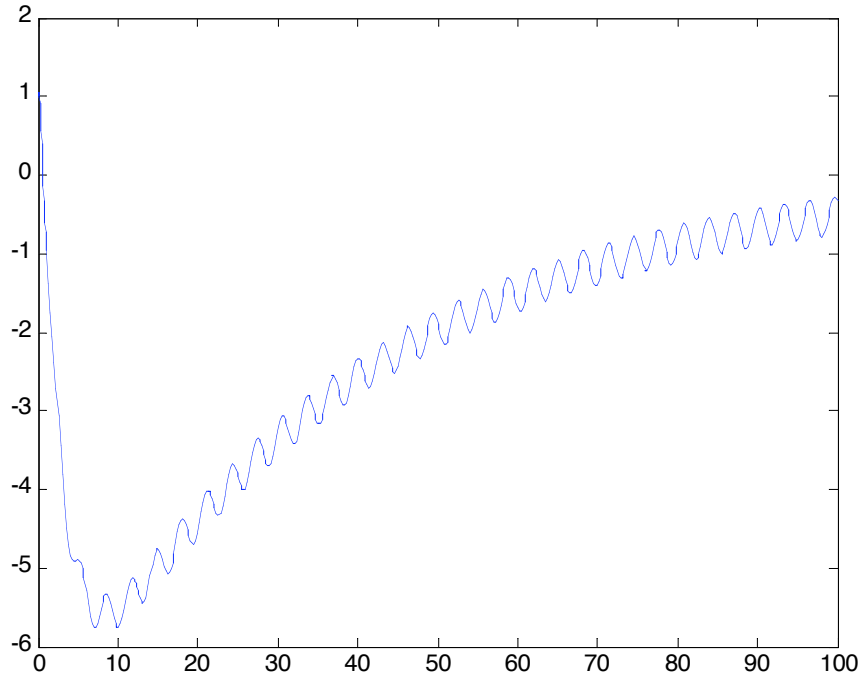
- kommenterar bort `k=FJADER`; genom att sätta procenttecken före
- avkommenterar istället raden `k=fjader(y(1))`; eftersom det är y som k ska bero av
- funktionen `fjader(y)` som ska tillse att k är 10 respektive 0.01 beroende på y -värdet skrivs enligt nedan och tillfogas i slutet av filen `svfunt.m`:

```
function k=fjader(y)
n=length(y);
if y(1,n) >= 0
    k=10;
else
    k=0.01;
end
```

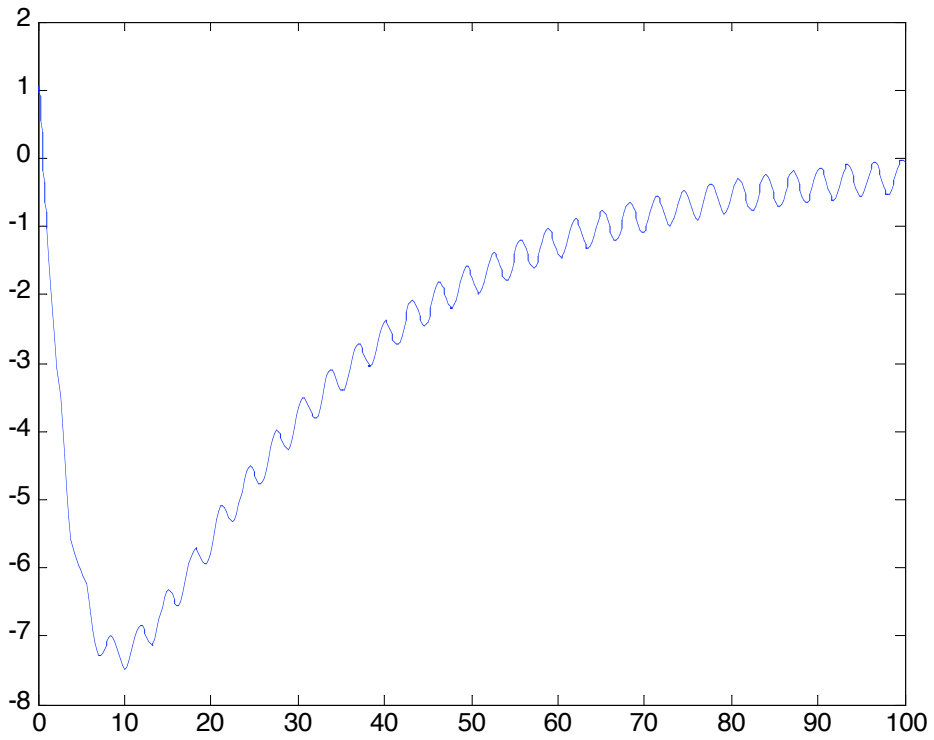
Nu kan MATLAB-grafer genereras för olika värden av d . Dessa visas i Figur 10-21 nedan.



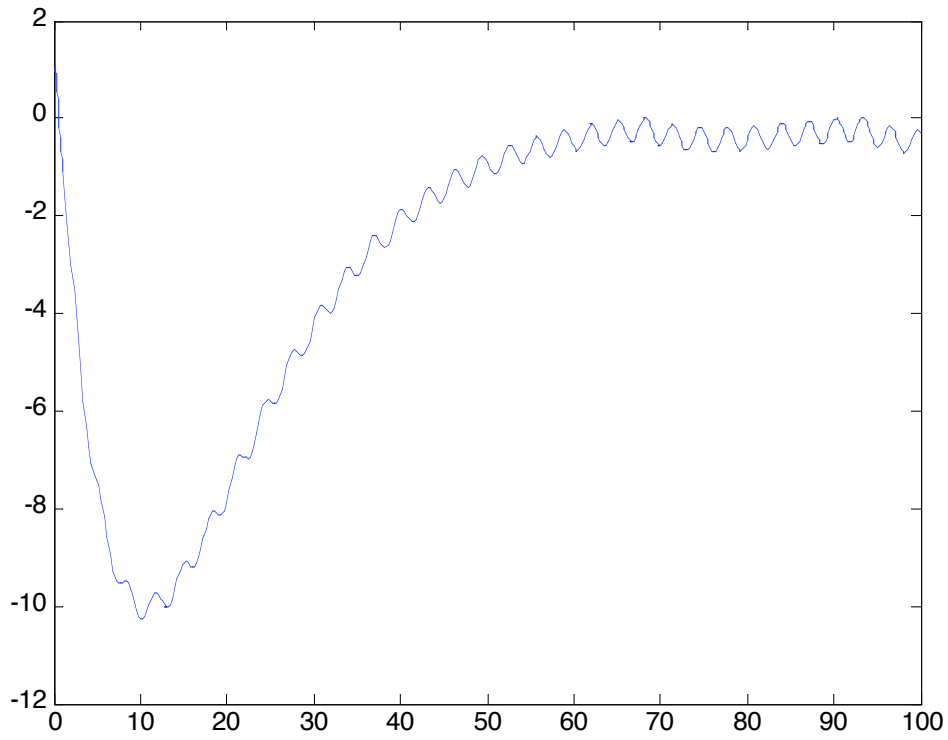
Figur 10. $d = 0.5$



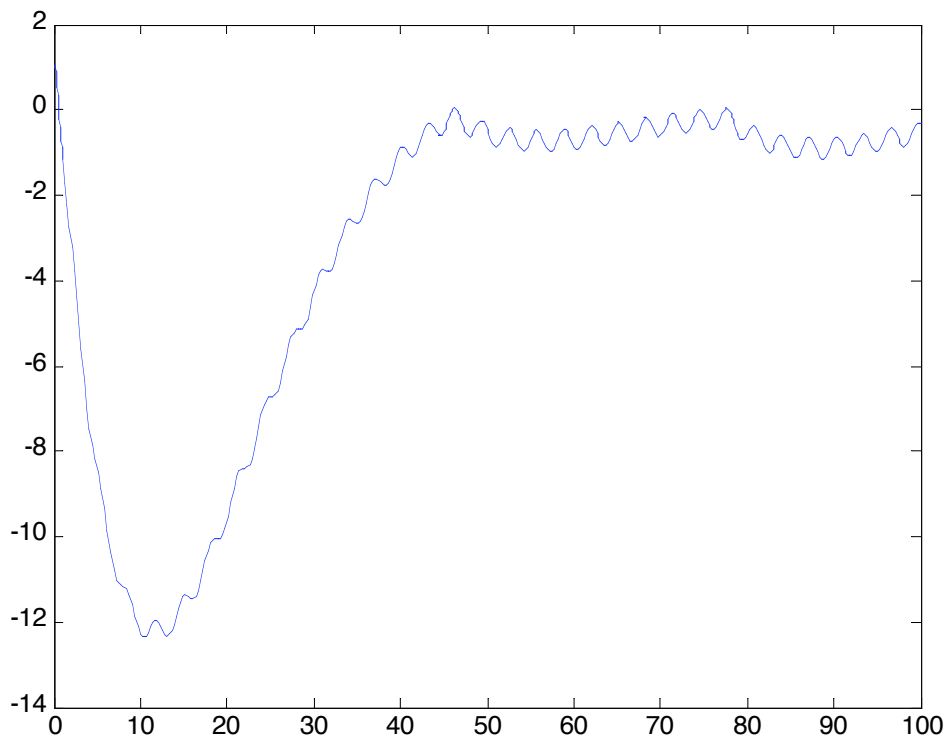
Figur 11. $d = 0.4$



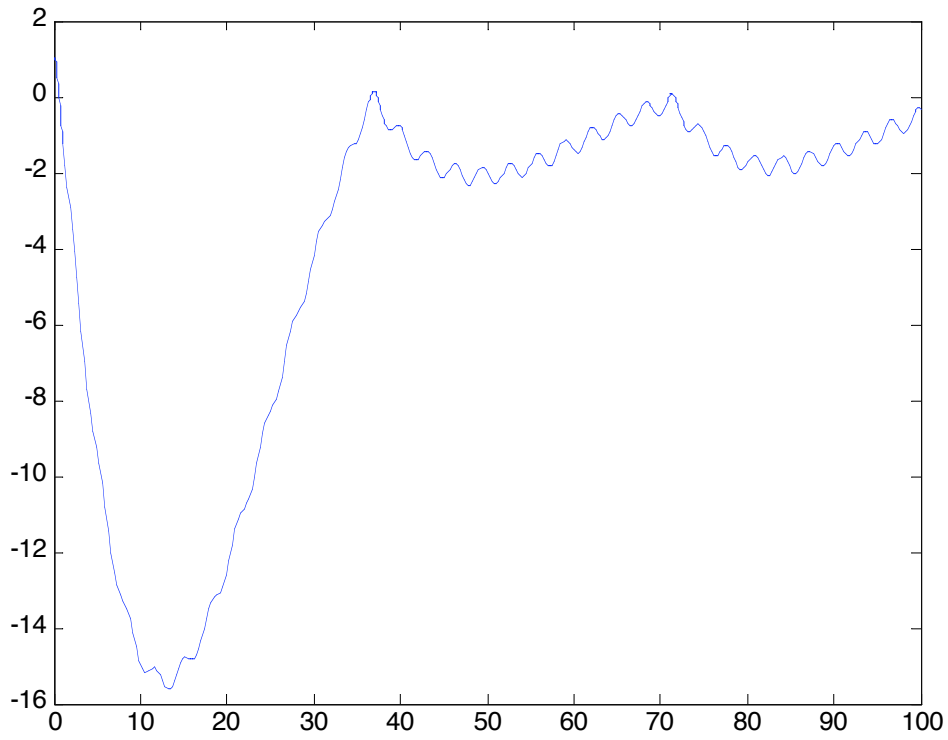
Figur 12. $d = 0.3$



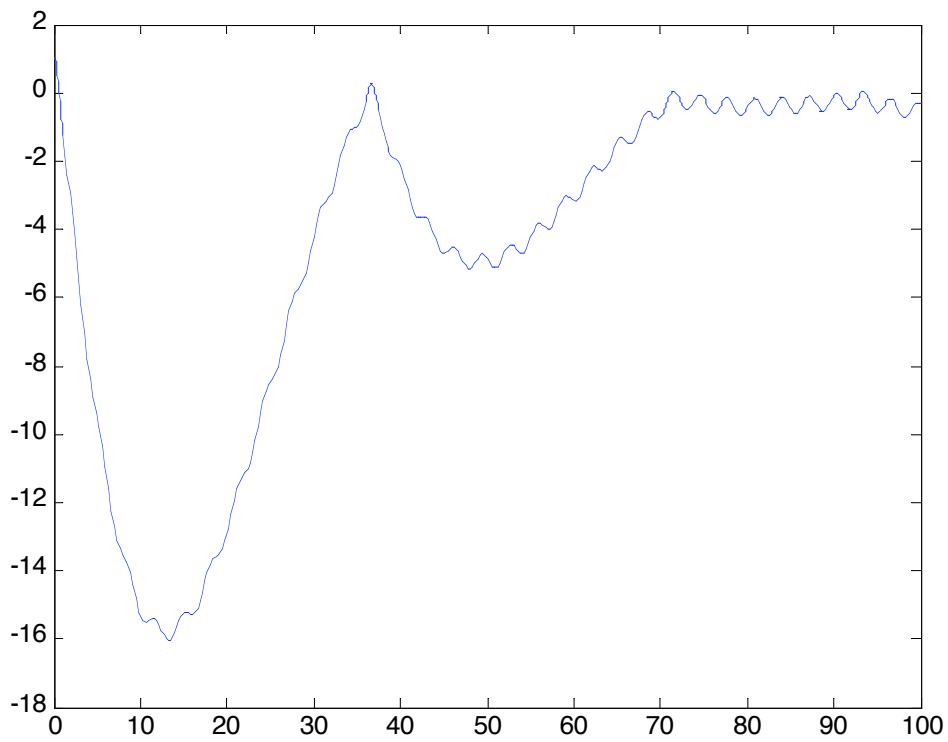
Figur 13. $d = 0.2$



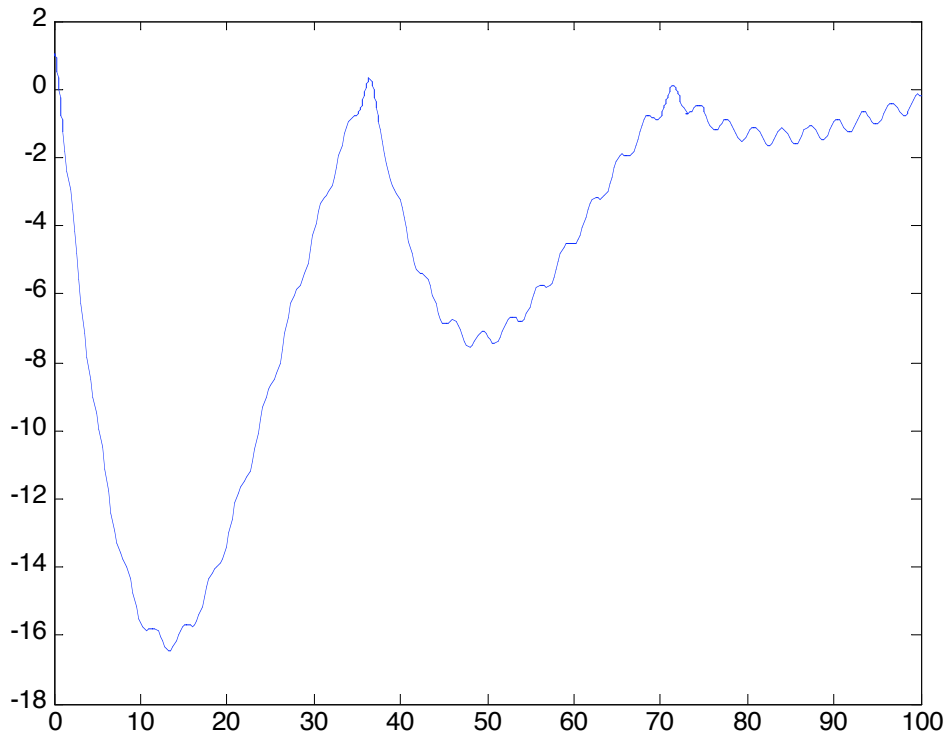
Figur 14. $d = 0.15$



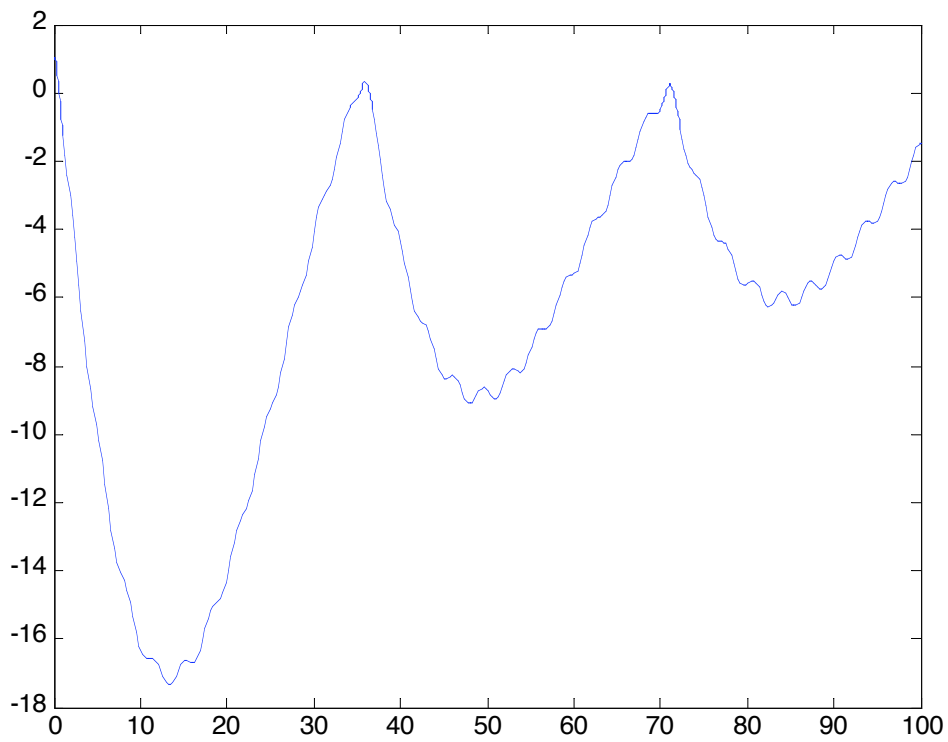
Figur 15. $d = 0.10$



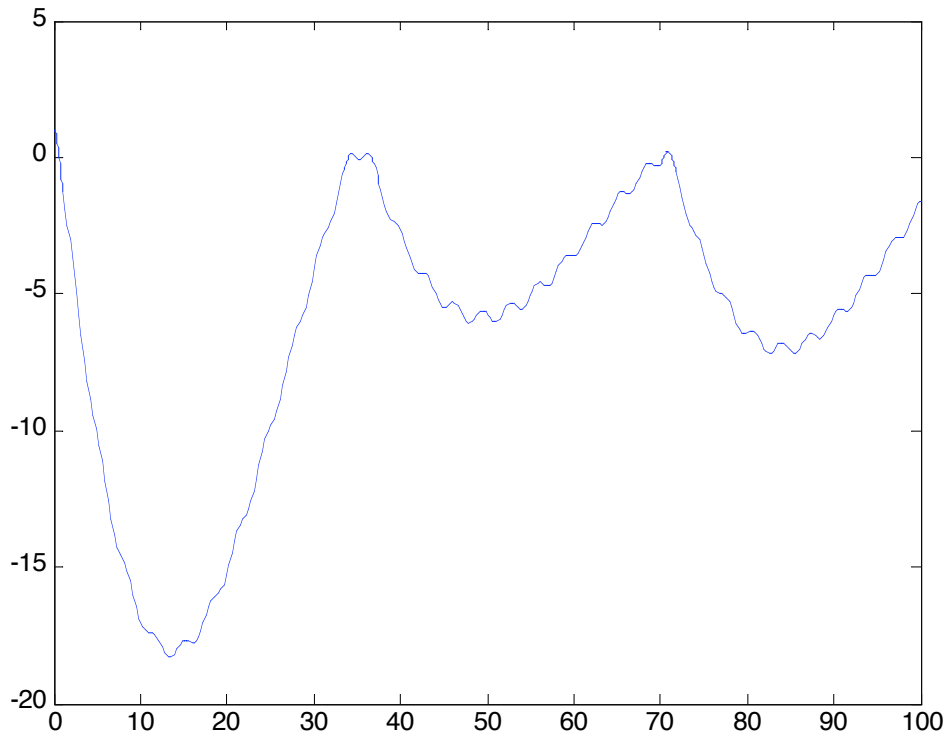
Figur 16. $d = 0.095$



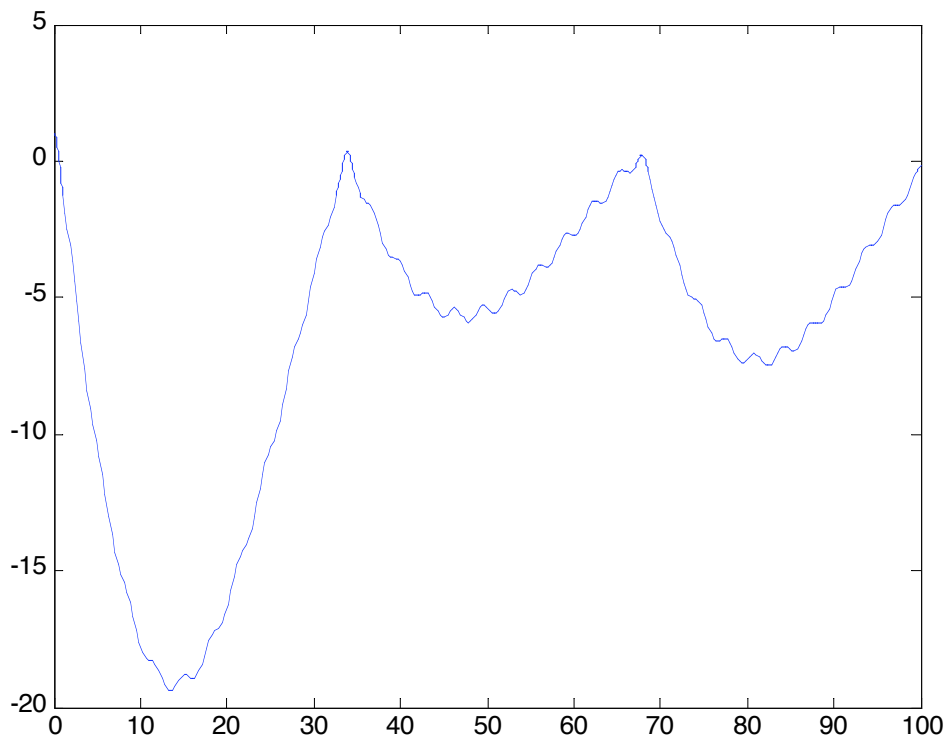
Figur 17. $d = 0.09$



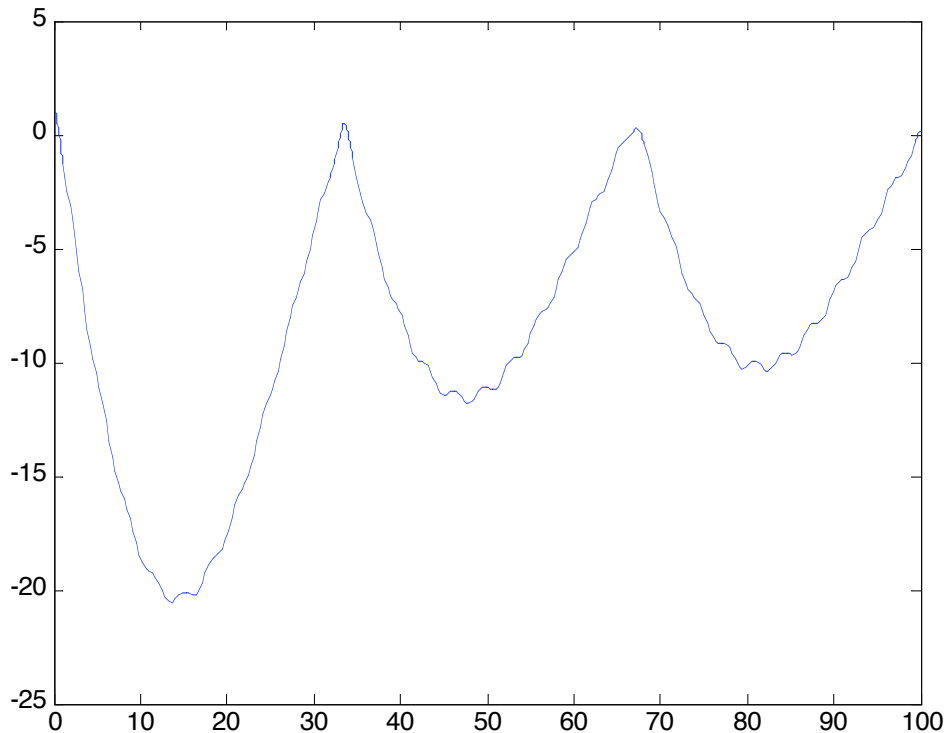
Figur 18. $d = 0.08$



Figur 19. $d = 0.07$



Figur 20. $d = 0.06$



Figur 21. $d = 0.05$

I Figur 10-21 finns inget regelbundet mönster och vi kan inte längre tala om olika typer av lösningar, eftersom parametern k är ej längre konstant.

Referenser:

1. <http://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1147/ME/200607/matlabenvar/5B1147matlab.pdf>, "Envariabelanalys med Matlab", KTH, 5B1147 Envariabelanalys för IT och ME's hemsida.
2. <http://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1147/ME/200607/matlabenvar/lab11.pdf>, "Lab11 'Svängningar' (se kursboken 'Analys i en variabel' sid 347-349)", KTH, 5B1147 Envariabelanalys för IT och ME's hemsida.
3. Arne Persson, Lars-Christer Böiers, 2001, "Analys i en variabel", Studentlitteratur, 91-44-02056-2