Analys av funktioner och dess derivata i Matlab.

5B1147 Envariabelanalys

Ludvig Adlercreutz, ME

Hans Lindgren, IT

Stockholm den 7 mars 2007

Kursledare: Karim Daho

Innehåll

Uppgift 15

Beräkna derivatan numeriskt för funktionen $f(x) = \arctan(2x)$ samt uppskatta felet som beräkningen ger upphov till.

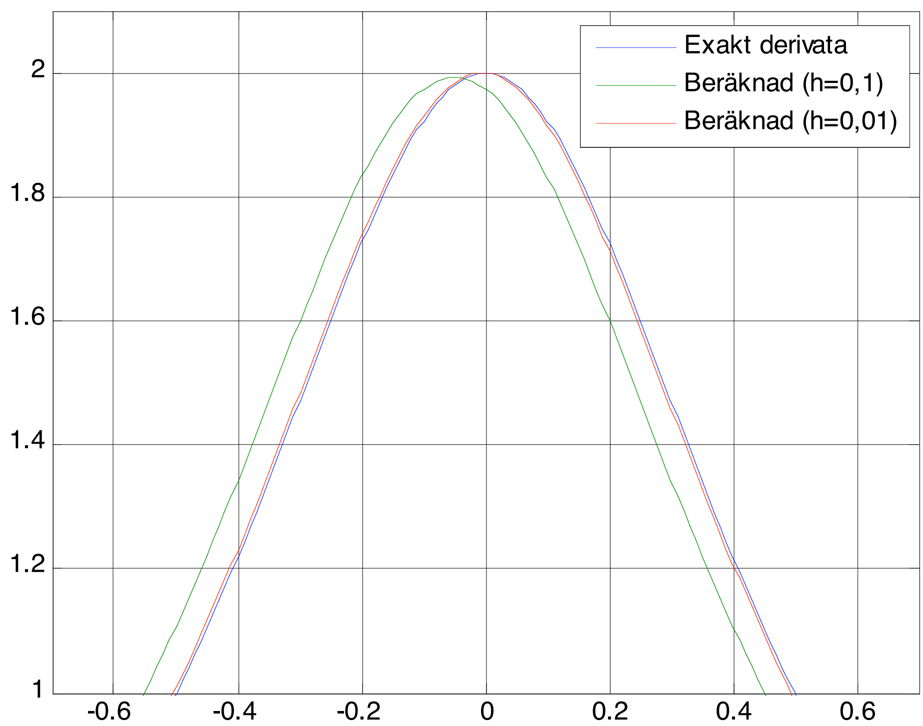
Ur definitionen för derivatan kan en formel för numerisk beräkning tas fram. Derivatans definition lyder

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Genom att välja ett litet värde på *h* kan derivatan beräknas approximativt med formeln

$$f'(x)_{num} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

För värden på *h*>0 fås högerderivatan och för värden på *h*<0 fås vänsterderivatan. Ju mindre värde på *h* som väljs, desto mindre blir felet enl. de plottade kurvorna i figur 15-1 nedan.

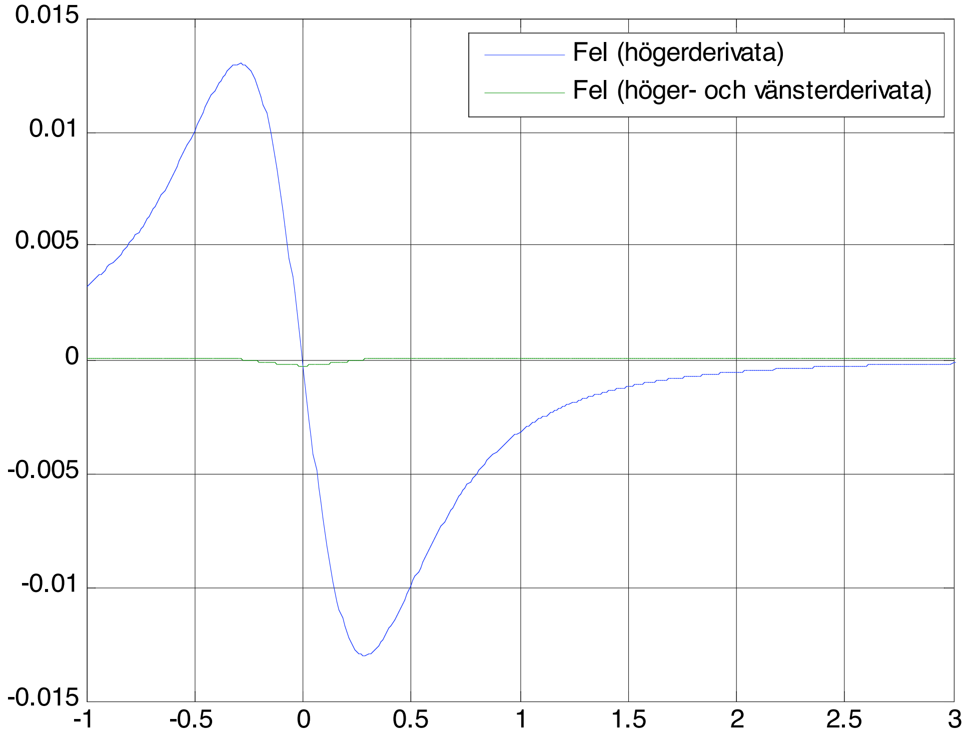


Figur 15-1 Jämförelse av exakt och beräknad derivata.

En bättre numeriskt beräknad approximation kan erhållas om ett medelvärde mellan höger- och vänsterderivatan beräknas. Formeln för denna kan kan utvecklas enl. följande.

$$f'(x)_{num} = \frac{f'(x)_{hö} + f'(x)_{vä}}{2} = \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}}{2} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Skillnaden i fel mellan den exakta derivatan och den beräknade blir ansevärt mindre vid beräkning av medelderivatan vilket syns tydligt i figur 15-2 nedan.



15-2 Skillnaden i fel vid beräkning av höger- och medelderivata.

Följande kod i Matlab har använts för att generera grafen i figur 15-2 ovan.

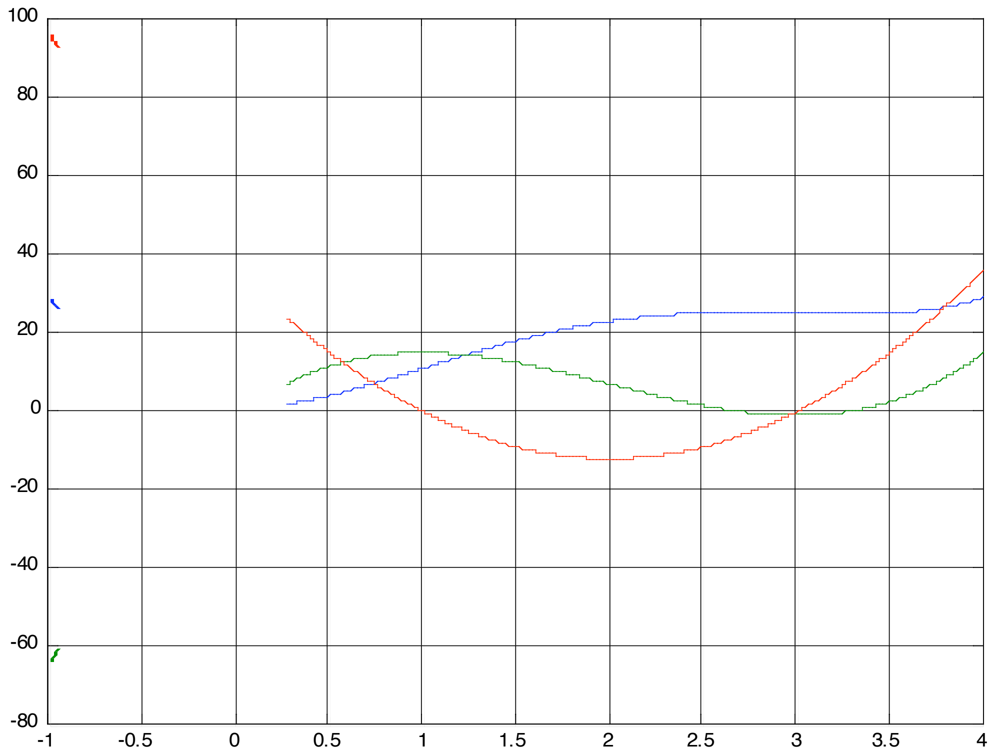
```
f=inline('atan(2*x)','x');
x=-5:0.01:5;
h=0.01;
df1=(f(x+h)-f(x))/h;
df2=(f(x+h)-f(x-h))/(2*h);
plot(x,df1-(2./(1+(2.*x).^2)),x,df2-(2./(1+(2.*x).^2))),grid;
axis([-1 3 -15*10^-3 15*10^-3]);
legend('Fel (högerderivata)','Fel (höger- och vänsterderivata)')
```

Uppgift 16

Kör följande kod i Matlab och försök ur figuren avgöra vilken kurva som är funktionen, dess derivata samt dess andraderivata.

```
f=inline('polyval([1 -8 18 -1 1],x)','x');
x=-1:0.01:4;h=0.01;df=(f(x+h)-f(x-h))/(2*h);ddf=(f(x+h)-2*f(x)+f(x-
h))/(h^2);
plot(x,f(x),x,df,x,ddf),grid
```

Figur 16-1 nedan visar grafen som ritas i Matlab.



Figur 16-1 Kurvor som skall bestämmas.

Man kan ur grafen urskilja att alla kurvorna är både avtagande samt stigande för olika värden på x. Följaktligen måste deras respektive derivator anta både positiva och negativa värden. Den blå kurvan antar endast positiva värden och kan därför ej beskriva någon av de andra kurvornas derivata. Den blå linjen antas vara funktionskurvan *f(x)*.

Genom att studera extremvärden i den plottade grafen kan man se att den blå funktionskurvan har tre extremvärden, den gröna kurvan två och den röda endast ett extremvärde. Förutsatt att funktionskurvan beskriver ett polynom av grad *n* har dess derivata grad *n-1* och dess andraderivata grad *n-2*. Derivatan bör således beskrivas av den gröna kurvan och andraderivatan av den röda kurvan.

En tabell kan konstrueras för att se hur kurvorna överensstämmer när ett extremvärde uppstår.

x	**0**	1	2	**2,7**	3	**3,3**
Blå	**min**		+	**max**		**min**
Grön	**0**	max	+	**0**	min	**0**
Röd	**+**	0	min	**-**	0	**+**

Studeras denna i detalj kan tidigare antaganden bekräftas då den blå kurvans lokala extrempunkter har nollderivata enligt den gröna kurvan och positiv/negativ andraderivata överensstämmande med den röda kurvan.

Uppgift 17

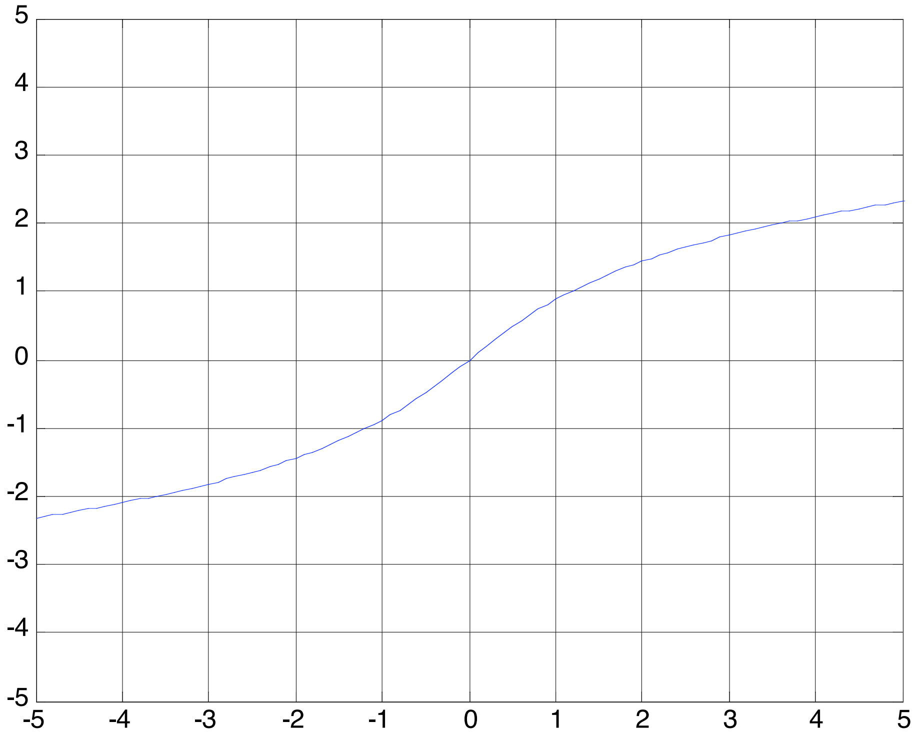
Till övningsuppgifterna nedan används den i uppgift 15 framtagna formeln för numerisk beräkning av derivatan.

Övningsuppgift 3.11a

Plotta och undersök följande funktion och dess derivata.

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

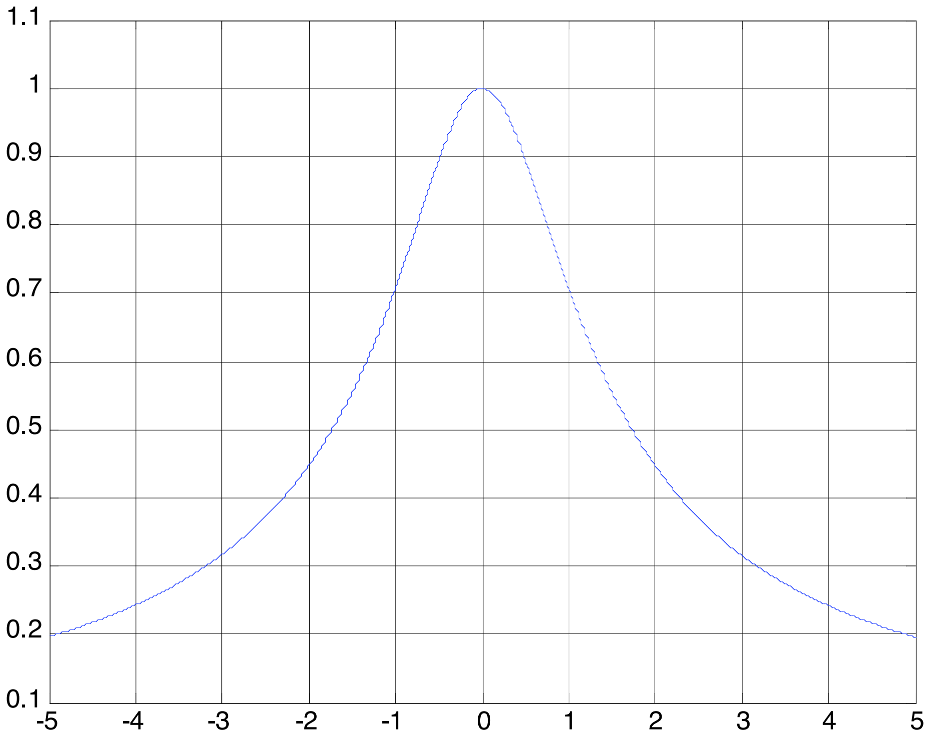
Bestäm om funktionen är kontinuerlig, är deriverbar och har kontinuerlig derivata.



Figur 17a-1 Plottning av funktionskurvan.

Funktionskurvan ser ut att vara kontinuerlig och strängt växande. Funktionen växer kraftigare kring x=0.

Genom att titta på funktionen ser man att $x + \sqrt{1 + x^2}$ är positiv för alla x och att logaritmen för hela uttrycket därför är definierad för alla x.



Figur 17a-2 Plottning av funktionens derivata.

Derivatan är kontinuerlig och positiv för alla *x* vilket överensstämmer med att funktionen är strängt växande. Derivatan antar maxvärde=1 i *x*=0 och går mot 0 då $x \to \pm\infty$. En beräkning av den exakta derivatan ger att detta är ett korrekt antagande enl. nedan.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(0) = 1$$

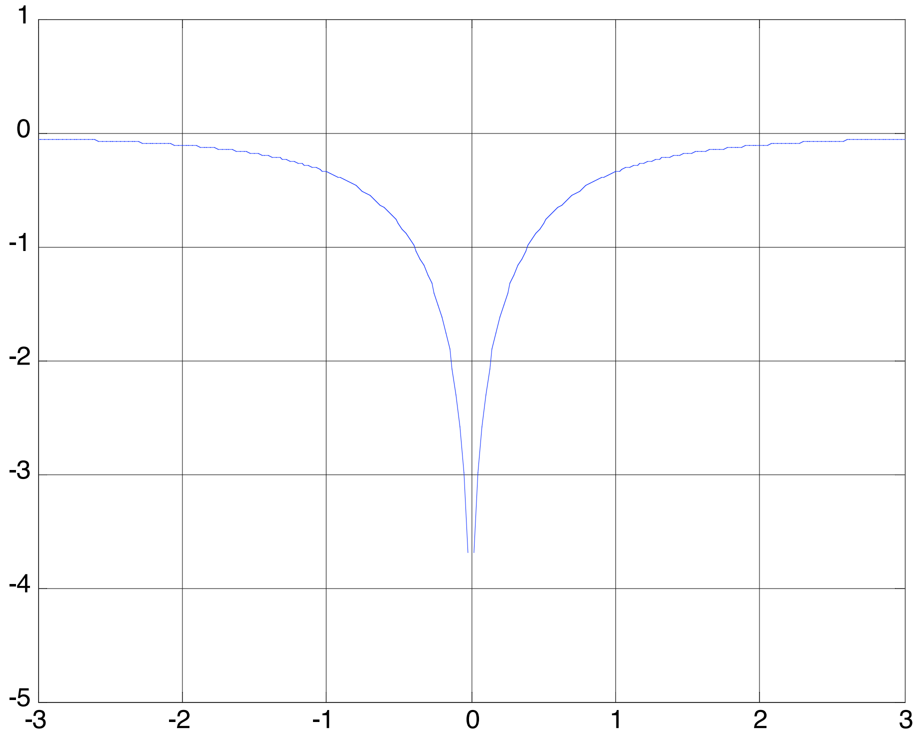
Då termen i nämnaren är positiv för alla värden på *x* och hela uttrycket går mot 0 då $x \to \pm\infty$ stämmer den plottade grafen väl.

Övningsuppgift 3.11b

Plotta och undersök följande funktion och dess derivata.

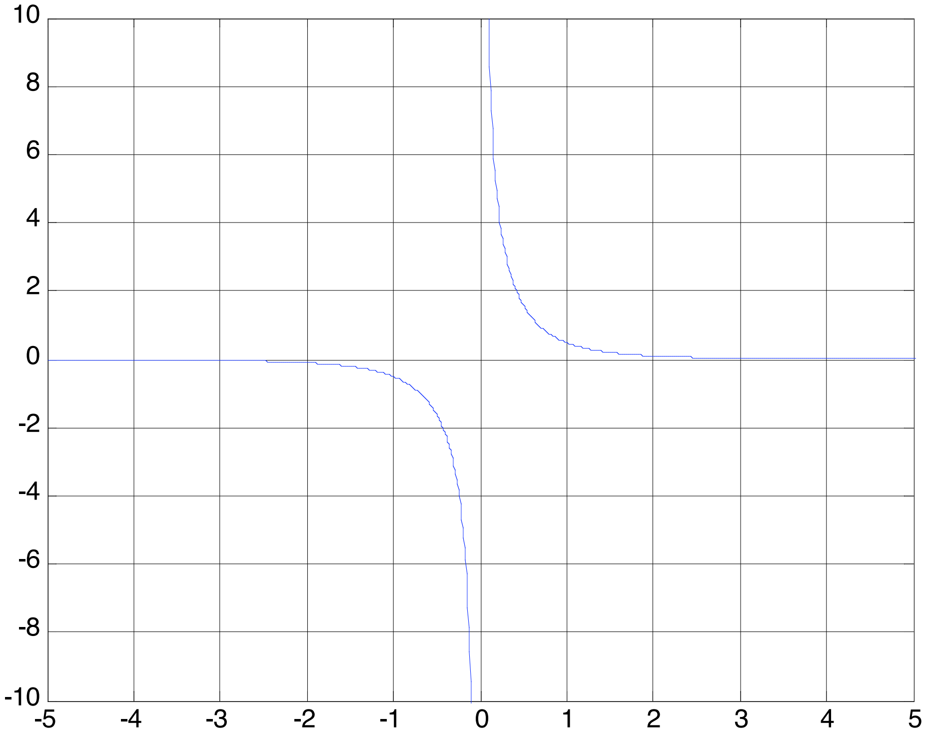
$$f(x) = \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Bestäm om funktionen är kontinuerlig, är deriverbar och har kontinuerlig derivata.



Figur 17b-1 Plottning av funktionskurvan.

Funktionen verkar inte vara kontinuerlig i punkten x=0. Tittar man på funktionen ser man att det inre uttrycket $\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$ är 0 då x=0. Eftersom ln(0) ej är definierad överensstämmer detta med den plottade kurvan.



Figur 17b-2 Plottning av funktionens derivata.

Likt funktionen är derivatan kontinuerlig i alla $x \neq 0$. Det matematiska resonemanget med den exakta derivatan ger följande bevis för detta:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{\frac{(1+x^2) - x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot (1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

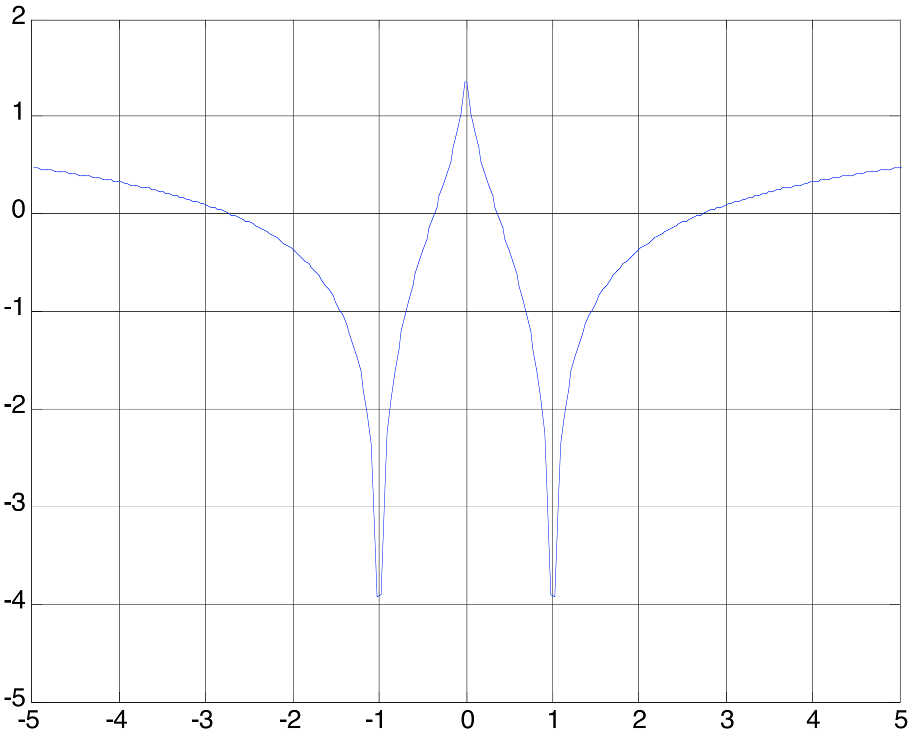
Då $x = 0$ ger 0 i nämnaren är derivatan ej definierad i denna punkt. Vidare ger beräkningen av den exakta derivatan att denna är negativ för negativa värden på x och positiv för positiva värden på x samt går mot 0 då $x \to \pm\infty$. Även detta stämmer väl med den plottade grafen.

Övningsuppgift 3.11c

Plotta och undersök följande funktion och dess derivata.

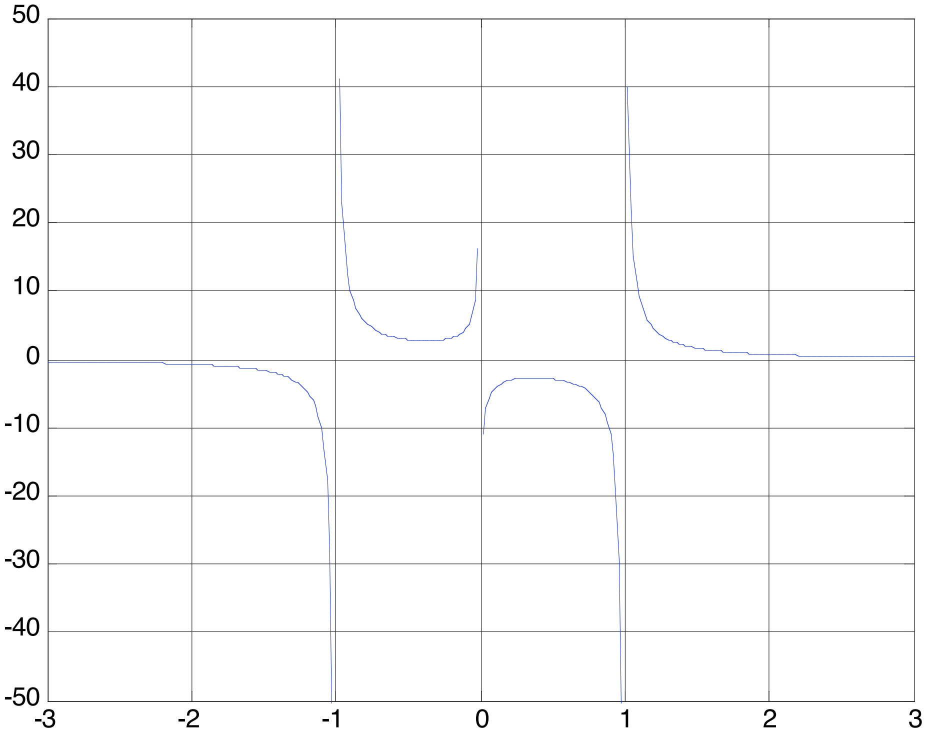
$$f(x) = \ln\left|\ln|x|\right|$$

Bestäm om funktionen är kontinuerlig, är deriverbar och har kontinuerlig derivata.



Figur 17c-1 Plottning av funktionskurvan.

Enligt den plottade kurvan verkar funktionen vara kontinuerlig för alla *x* skiljt från -1, 0 och 1. Med vetskapen att ln(0) ej är definierad och att ln(1) = 0 ser man att det inre ln-uttrycket i funktionen blir 0 då $x = \pm 1$. Resultatet är alltså att funktionen ej är definierad i någon av dessa punkter.



Figur 17c-2 Plottning av funktionens derivata.

Derivatan verkar inte heller den vara definierad för ovan nämnda värden på *x*. Den är dock kontinuerlig i intervallen däremellan. Den exakta derivatan beräknas enl. följande.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\ln\left|\ln|x|\right| = \frac{1}{\ln|x|}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln|x|}$$

Ur funktionen kan ses att derivatan inte kan anta de ovan nämnda värdena då detta resulterar i 0 i nämnaren.

Uppgift 18

Bestäm en metod för numerisk beräkning av tredjederivatan och plotta med hjälp av denna tredjederivatan av $f(x) = xe^x$.

Med utgångspunkt i derivatans definition kan tredjederivatan beräknas. Först tas ett uttryck för andraderivatan fram. Andraderivatan kan skrivas som derivatan av förstaderivatan och utvecklas.

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

För att nå en bättre approximation används medelderivatan av vänster- och högerderivatan.

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{f(x+2h) - f(x)}{2h}\right) - \left(\frac{f(x) - f(x-2h)}{2h}\right)}{2h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x) - (f(x) - f(x-2h))}{(2h)^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{(2h)^2}$$

Då $2h$ i uttrycket kan ersättas med h utan att förändra uttrycket då båda går mot 0 blir resultet följande uttryck.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Vidare kan ett uttryck för tredjederivatan utvecklas ur denna enl. följande.

$$f'''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x-h)}{2h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\dfrac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}\right) - \left(\dfrac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}\right)}{2h} =$$

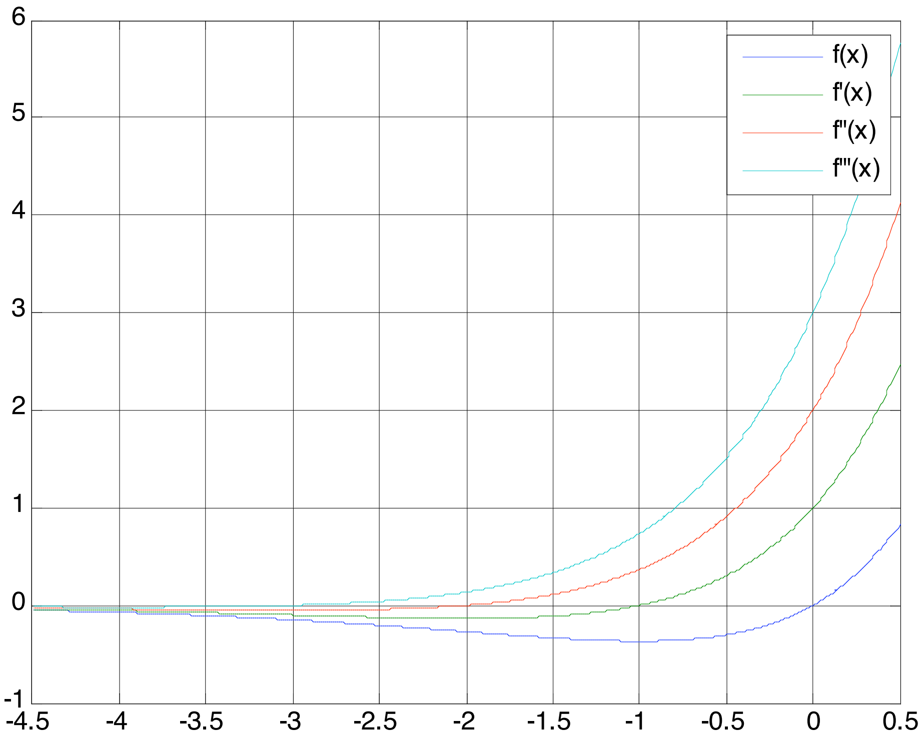
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) - (f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h))}{2h^3} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}$$

Enl. tidigare resonemang kan det framtagna uttrycket användas för att göra en numerisk approximation av tredjederivatan om små värden på *h* väljs.

$$\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}$$

Figur 18-1 nedan visar funktionen $f(x) = xe^x$ och dess första-, andra och tredjederivata.



Figur 18-1 Funktion, dess första-, andra- och tredjederivata.

Funktionen skär x-axeln i punkten 0 och har ett lokalt minimum i punkten -1. Detta stämmer med derivatan som antar värdet 0 i punkten -1. Derivatan har dessutom ett lokalt minimum i punkten -2 vilket överensstämmer med andraderivatans skärning med x-axeln i samma punkt. Samma mönster upprepar sig med tredjederivatan.

Ur de exakta derivatorerna till funktionen kan man utläsa att detta överensstämmer med det plottade resultatet i figur 18-1 ovan.

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1 + x) \cdot e^x \Rightarrow f'(-1) = 0$$

$$f''(x) = 2e^x + xe^x = (2 + x) \cdot e^x \Rightarrow f''(-2) = 0$$

$$f'''(x) = 3e^x + xe^x = (3 + x) \cdot e^x \Rightarrow f'''(-3) = 0$$