5B1147
Envariabelanalys

MATLAB Laboration

Laboration 1

Gränsvärden och Summor

Joyce Wong
joycew@kth.se

Daniel Uvehag
uvehag@kth.se

Innehåll

Uppgift 10a

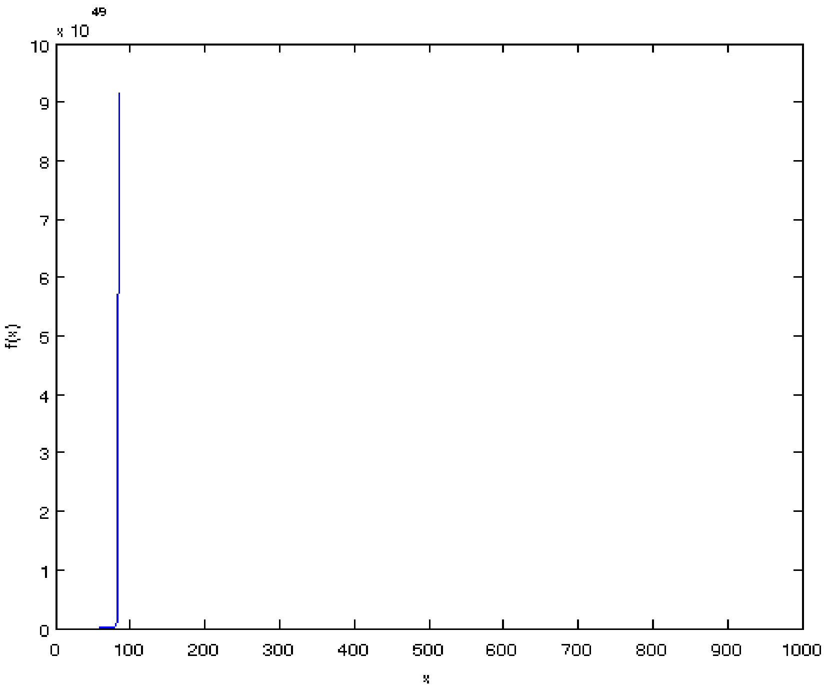
Problem

Plotta och beräkna $f(x)=\lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n}$.

Lösning

Grafisk bestämning av gränsvärden

Funktionen matas in i MATLab och plottas därefter. Resultatet blir enligt figur 1.



Figur 1: Plottning av $f(x)=\binom{2n}{n}$

Vid noggrann avläsning av grafen ses att då $n=85$ slutar grafen och MATLab påstår att högre värden är oändliga ($f(x)=\infty : x\geq 86$). Den grafiska tolkningen blir således att

$f(x) = \lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n} = \infty$.

Beräkning av gränsvärden

För att enklare förstå nästkommande steg konstateras först det trivila beviset $(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}$.

Binominalsatsen[1] ger att $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Vid kombination av *Vandermondes identitet*[2] ($\sum_j \binom{m}{j}\binom{n-m}{k-j} = \binom{n}{k}$), sambandet ($\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$)[3] och då $n = 2m, k = m$ fås:

$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}^2 = \binom{2m}{m}$. Detta tillämpas till det aktuella problemet.

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 , n = 1, 2, \ldots$$

Efter vidareutveckling ges

$$\binom{n}{k} \geq 1 \Rightarrow \binom{n}{k}^2 \geq \binom{n}{k} \Rightarrow \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \geq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

vilket ger att

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n} = \infty$$

1 Analys i En Variabel – s. 62 – (15)
2 http://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde%27s_identity
3 Analys i En Variabel – s. 61 – (14)

Uppgift 10b

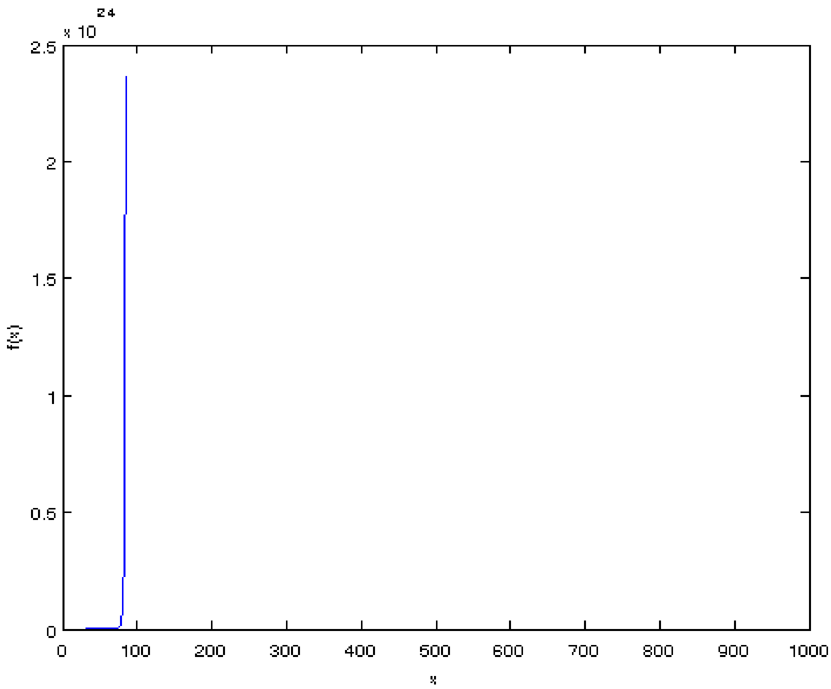
Problem

Plotta och beräkna $f(x)=\binom{2n}{n}2^{-n}$.

Lösning

Grafisk bestämning av gränsvärden

Funktionen matas in i MATLab och plottas därefter. Resultatet blir enligt figur 2.



Figur 2: Plottning av $f(x)=\lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n}2^{-n}$

Vid noggrann avläsning av grafen ses att då $n=85$ slutar grafen och MATLab påstår att högre värden är oändliga ($f(x)=\infty : x\geq 86$). Den grafiska tolkningen blir således att

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n}2^{-n}=\infty\ .$$

Beräkning av gränsvärden

$\binom{2n}{n}$ utvecklas till $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{n!}\geq\frac{n^n}{n!}$ enligt följande:

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}=\frac{n!(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}{n!\cdot n!}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{n!}\geq\frac{n^n}{n!}\Leftrightarrow$$

$$\binom{2n}{n}2^{-n}\geq\frac{n^n}{n!}2^{-n}\Leftrightarrow\binom{2n}{n}2^{-n}>\left(\frac{n}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$$

Detta i sin tur leder till att:

$$\lim_{n\to\infty}2^{-n}\binom{2n}{n}=\infty$$

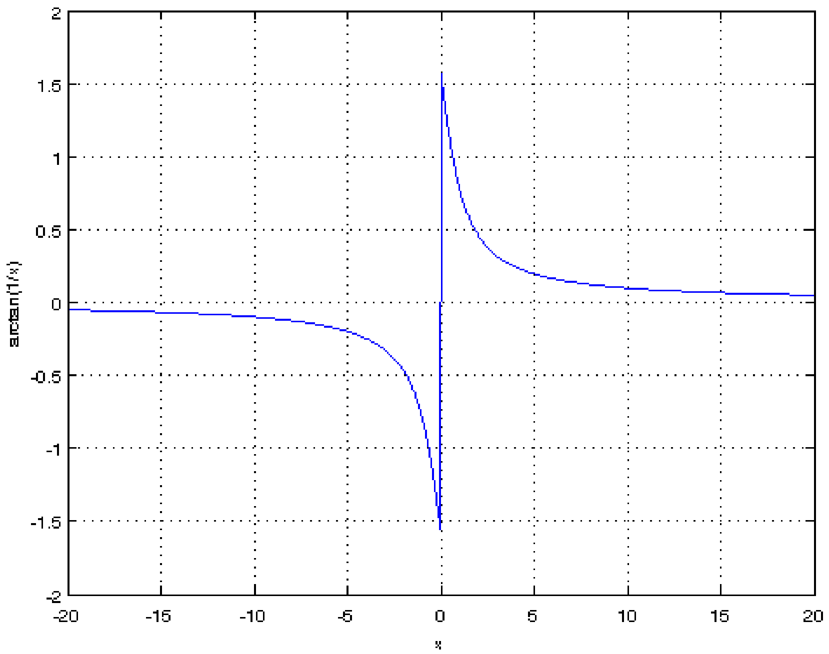
Uppgift 11

Problem

Undersök höger- och vänstergränsvärde i $x=0$ för $\arctan\frac{1}{x}, x\neq0$.

Lösning

Funktionen $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ plottas i MATLAB mellan intervallet $-20\leq x\leq20$ vilket resulterar i en graf enligt Figur 3.



Figur 3: $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$

När $x=0$ får vi att $\frac{1}{x}=\infty$ vilket resulterar i $f(0)=\arctan\infty$.

Då $x \rightarrow 0^+$ (x går mot 0 från positiv sida) kommer funktionen resultera i $\frac{\pi}{2}$.

Då $x \rightarrow 0^-$ (x går mot 0 från negativ sida) kommer funktionen resultera i $\frac{-\pi}{2}$.

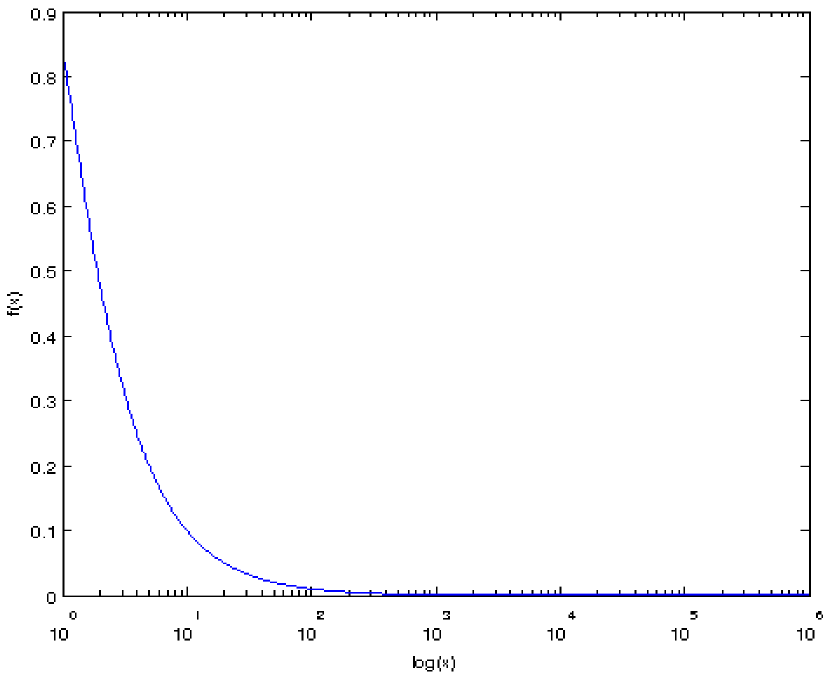
Uppgift 12

Problem

Undersök gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\frac{1}{x}$. Plotta med logaritmisk skala av x-axeln. Förklara den bild du får.

Lösning

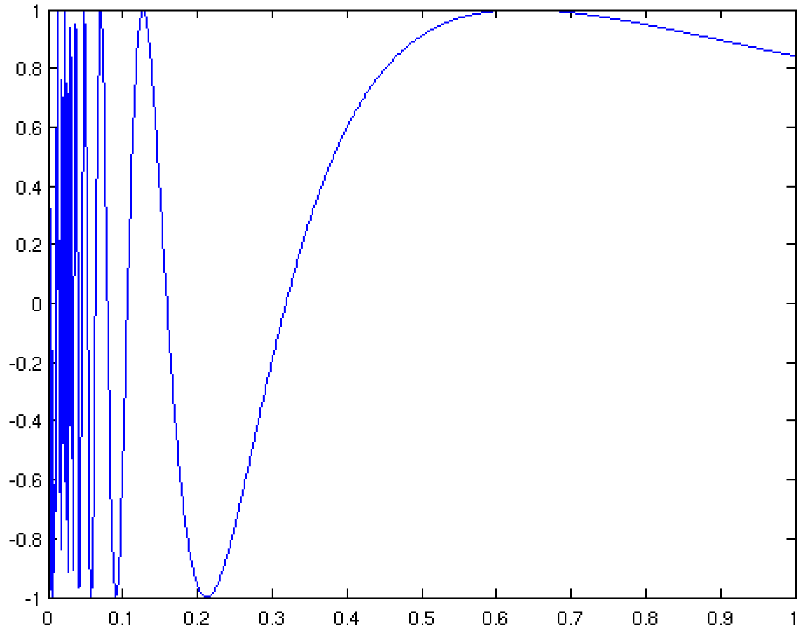
I gränsvärdet $\lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$ då $x \to 0$ som plottas i Matlab bildar Figur 4.



Figur 4: $f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$

Grafen visar funktionen med logaritmisk skala på x-värdet. Den säger oss inte så mycket, men då x går mot 0 får vi till synes värdet $\sin(1)$.

När $x = 0$ får vi att $\frac{1}{x} = \infty$ vilket resulterar i $f(0) = \sin \infty$. Funktionen kommer således oscillera mellan -1 och 1 och vara obestämd. Ju närmare 0 x går, desto fortare kommer funktionen att pendla. Se Figur 5.



Figur 5: $f(x)=\lim_{x\to\infty} \sin x$

För varje x nära 0 finns ett x som är närmare 0 eftersom att x = 0 inte ingår i definitionsmängden. Ju närmare x = 0 man kommer desto fortare växer 1/x och funktionen pendlar således snabbare.

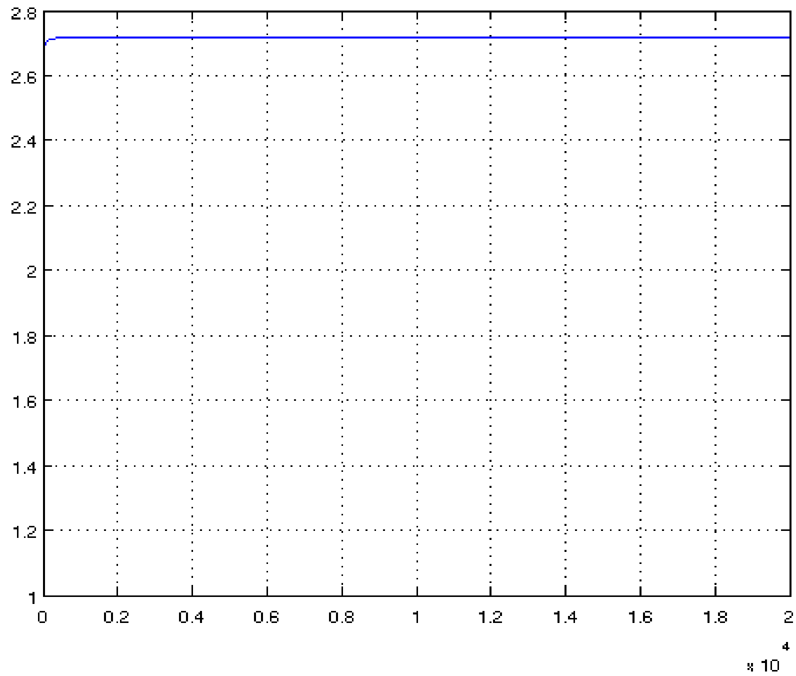
Uppgift 13

Problem

Använd uttrycket $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ för att bestämma ett närmevärde mot e.

Lösning

Funktionen $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ plottas i MATLAB mellan intervallet $0\le n\le 20000$ vilket resulterar i en graf enligt Figur 6.



Figur 6: $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Nedan följer en tabell med olika värden på n.

n	$f(n)$
1	1
10	2.5812
100	2.7047
500	2.7156
1000	2.7169
2000	2.7176
10000	2.7181
20000	2.7182

Ju högre värde för n, desto närmare värde för e. Då $n=20000$ fås ett närmevärde $e \approx 2.7182$.

Uppgift 14

Problem

Undersök m.h.a. plottning vad som händer med uttrycket $\sin\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right)$ då:

a) x är heltal som går mot oändligheten.

b) x är reella tal som går mot oändligheten.

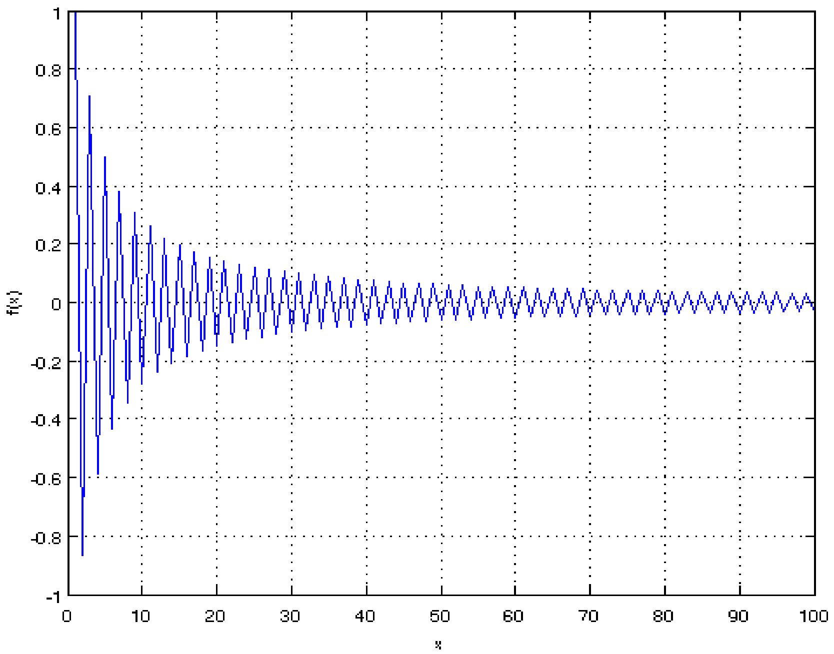
Lösning

Originalfunktionen skrivs om till $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x^2}{x(1+\frac{1}{x})}\right)=\sin\left(\frac{\pi x}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

För uppgift a tillhör x heltalen ($x\in\mathbb{Z}$). Detta ger att täljaren alltid kommer vara π eller $-\pi$ då endast heltal tillåts.

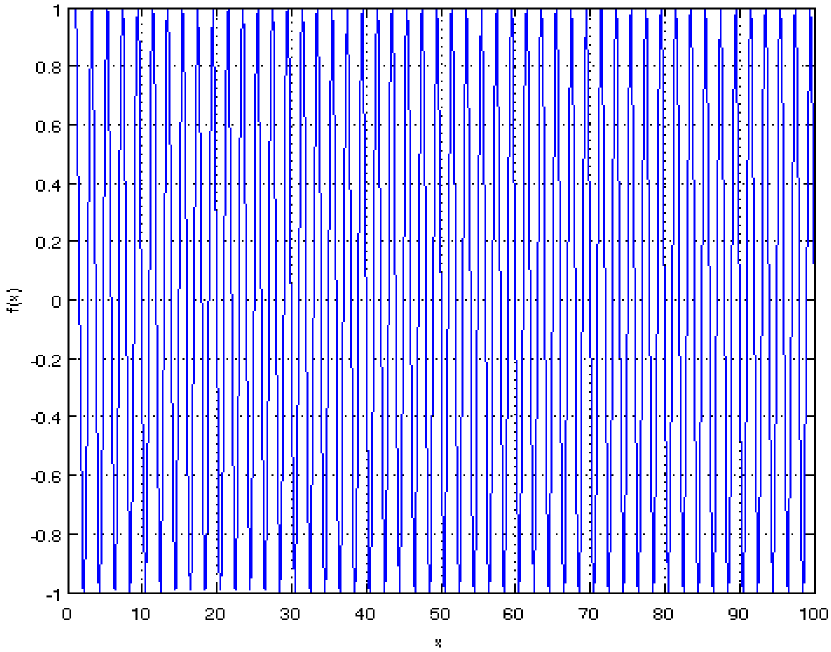
Då x går mot ∞ försummas termen $\frac{1}{x}$ ($\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$) vilket resulterar i att täljaren blir 1.

$f(x)=\lim_{x\to\infty}\sin(\pi x)=0$ då x är ett heltal ($x\in\mathbb{Z}$) och $\sin(\pi x)=0$. Se Figur 7.



Figur 7: $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right), x\in\mathbb{Z}$

För uppgift *b* tillhör x de reella talen ($x\in\mathbb{R}$). Detta ger att sinusfunktionen kommer pendla mellan 1 och -1 ($-1\leq\sin x\leq 1$) på traditionellt vis då x antar alla reella värden. Se Figur 8.



Figur 8: $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right), x\in\mathbb{R}$

Uppgift 30

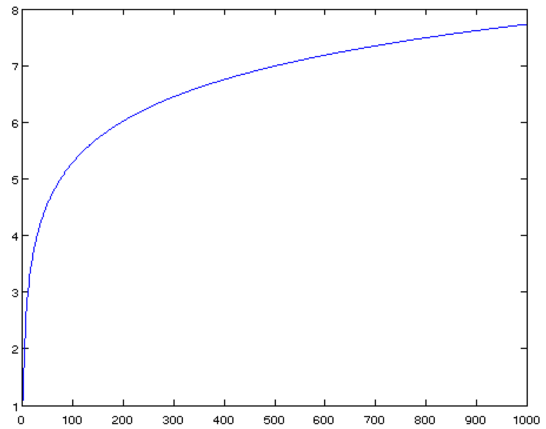
Problem

Beräkna de tusen första delsummorna till följande serier och försök avgöra om de är konvergenta eller divergenta.

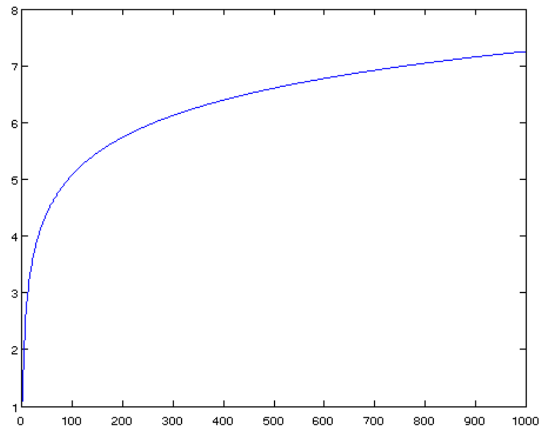
a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{0.99}}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1.01}}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} 2\arctan k-\pi$ d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}$

Lösning

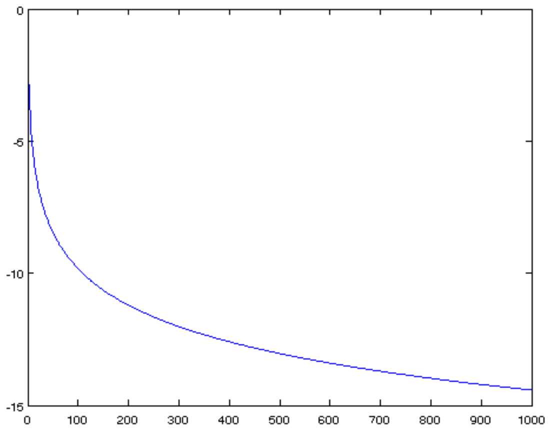
Vid plottning i MATlab ges följande figurer (se Figur 9-12).



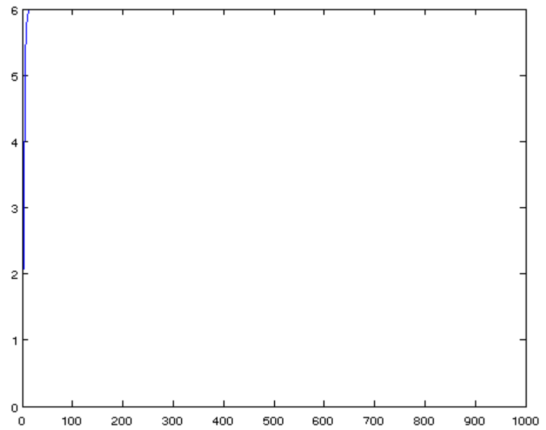
Figur 9: 30a



Figur 10: 30b



Figur 11: 30c



Figur 12: 30d

Plottning av funktionerna är tydligen ej tillräckligt för att bestämma om funktionerna är konvergenta eller divergenta.

Lösning 30a

Om serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergerar så gäller att $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ vilket bevisas i *Kompletterande kurslitteratur om serier*[4]. Figur 9 ger en antydan till att senare termer minskar i värde och således gäller ovanstående sats. Detta visas även med en tabell.

k	Delsumma	Skillnad
1	1.0000	-0.9896
101	0.0104	-0.0051
201	0.0052	-0.0017
301	0.0035	-0.0009
401	0.0026	-0.0005
501	0.0021	-0.0004
601	0.0018	-0.0003
701	0.0015	-0.0002
801	0.0013	-0.0001
901	0.0012	-0.0001
1001	0.0011	

Skillnaden mellan delsummorna krymper för högre värden på k vilket syns i tabellen ovan. Slutsatsen blir således att summan konvergerar.

Lösning 30b

Figur 10 ger även den en antydan till att senare termer minskar i värde. Detta visas även med en tabell.

k	Delsumma	Skillnad
1	1.0000	-0.9905
101	0.0095	-0.0047
201	0.0047	-0.0016
301	0.0031	-0.0008
401	0.0023	-0.0005

4 http://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1147/ME/200607/serier.pdf – sid 1.

501	0.0019	-0.0003
601	0.0016	-0.0002
701	0.0013	-0.0002
801	0.0012	-0.0001
901	0.0010	-0.0001
1001	0.0009	

Även här krymper skillnaden mellan delsummorna för högre värden på k vilket syns i tabellen ovan. Slutsatsen blir således att summan konvergerar.

Lösning 30c

Figur 11 ger även den en antydan till att senare termer minskar i värde. Detta visas även med en tabell nedan. $\lim_{k\to\infty} \arctan k = \frac{\pi}{2}$ vilket ger att sista termen blir $2\frac{\pi}{2} - \pi = 0$ styrker även påståendet att serien är konvergent.

k	Delsumma	Skillnad
1	-1.5708	1.5510
101	-0.0198	0.0099
201	-0.0100	0.0033
301	-0.0066	0.0017
401	-0.0050	0.0010
501	-0.0040	0.0007
601	-0.0033	0.0005
701	-0.0029	0.0004
801	-0.0025	0.0003
901	-0.0022	0.0002
1001	-0.0020	

Även här krymper skillnaden mellan delsummorna för högre värden på k vilket syns i tabellen ovan. Slutsatsen blir således att summan konvergerar.

Lösning 30d

Tabellen nedan visar värden för olika k:

k	k^2	2^k	$\frac{k^2}{2^k}$
1	1	2	0.5000
2	4	4	1.0000
3	9	8	1.1250
4	16	16	1.0000
5	25	32	0.7812
6	36	64	0.5625
7	49	128	0.3828
8	64	256	0.2500
9	81	512	0.1582
10	100	1024	0.0977
1000	1000000	1.0715e+301	9.3326e-296

Sista termen blir 0 eftersom att nämnaren växer mycket fortare än täljaren för värden då k är större än 4. Därav går sista termen mot 0 då k går mot oändligheten.

Summering

a)	Konvergent
b)	Konvergent
c)	Konvergent
d)	Konvergent

Uppgift 31

Problem

Använd kommandot **sum** för att beräkna ett approximativt värde på den konvergenta serien $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$. Beräkna sedan seriens exakta värde m.h.a. formel för geometriska summor.

Lösning

Då formeln löses i MATlab med med hjälp av **sum** fås ett närmevärde på: 0,5820.

Med hjälp av geometrisk summa löses problemet på följande sätt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{k}-\sum_{k=0}^{0}\left(\frac{1}{e}\right)^{k}\Rightarrow\frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)}-\left(\frac{1}{e}\right)^{0}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)}-1\approx 0{,}5820$$

Seriens exakta värde blir således $\frac{1}{1-e^{-1}}$ vilket ger ett värde nära det närmevärde som fås från MATlabs sum-funktion.

Uppgift 32

Problem

Man kan visa att $\ln(x+1)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ för $-1<x\leq 1$. Undersök VL och HL i denna identitet för några olika värden på x. Bekräftar dina iakttagelser att identiten verkar stämma?

Lösning

Vid undersökning i MATlab visas att $V.L.=H.L.:k\to\infty,-1<x\leq 1$. Nedan följer resultaten:

x	V.L.	H.L.	Skillnad (* 1.0e-04)
~~-1.0000~~	~~-Inf~~	~~-9.7876~~	~~-Inf~~
-0.9000	-2.3026	-2.3026	0

-0.8000	-1.6094	-1.6094	-0.0000
-0.7000	-1.2040	-1.2040	-0.0000
-0.6000	-0.9163	-0.9163	0.0000
-0.5000	-0.6931	-0.6931	-0.0000
-0.4000	-0.5108	-0.5108	0.0000
-0.3000	-0.3567	-0.3567	-0.0000
-0.2000	-0.2231	-0.2231	0
-0.1000	-0.1054	-0.1054	0
0	0	0	0
0.1000	0.0953	0.0953	-0.0000
0.2000	0.1823	0.1823	0
0.3000	0.2624	0.2624	0.0000
0.4000	0.3365	0.3365	-0.0000
0.5000	0.4055	0.4055	0.0000
0.6000	0.4700	0.4700	-0.0000
0.7000	0.5306	0.5306	0.0000
0.8000	0.5878	0.5878	0.0000
0.9000	0.6419	0.6419	0.0000
1.0000	0.6931	0.6931	0.5000

Till synes verkar påståendet vara sant och då MATlab ej är precist med decimaler samt att summeringen ej går hela vägen till oändligheten anses differensen vara försumbar. Först då x = 1 börjar större avvikelser uppträda.

Uppgift 33

Problem

Uttryck $lg\ x$ i $\ln x$, samt uttryck ${}^2\log x$ i $\ln x$.

Lösning

Basbyten sker generellt på formen $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$. Således skriver vi om $lg\ x$ som

$lg\ x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ respektive ${}^2\log x$ som ${}^2\log x = \frac{\ln x}{\ln 2}$. Detta testas i MATlab och resultaten blir således:

	1.29a			1.29b		
x	VL	HL	Diff (* 1.0e-15)	VL	HL	Diff (* 1.0e-15)
1	0	0	0	0	0	0
2	0.3010	0.3010	0	1.0000	1.0000	0
3	0.4771	0.4771	0.0555	1.5850	1.5850	0
4	0.6021	0.6021	0	2.0000	2.0000	0
5	0.6990	0.6990	0	2.3219	2.3219	0
6	0.7782	0.7782	0.1110	2.5850	2.5850	0
7	0.8451	0.8451	0.2220	2.8074	2.8074	0
8	0.9031	0.9031	0.1110	3.0000	3.0000	0
9	0.9542	0.9542	-0.1110	3.1699	3.1699	-0.4441
10	1.0000	1.0000	0	3.3219	3.3219	-0.4441

Då MATlab ej är tillräckligt precisionssäkert fås en liten skillnad mellan V.L och H.L., något som är försumbart.