Envariabelanalys 5B1147
MATLAB-laboration
Derivator

Sanna Eskelinen
eskelinen.sanna@gmail.com

Sonja Hiltunen
sohnya@gmail.com

Handledare: Karim Daho

Uppgift 15

Problem: Beräkna numeriskt derivatan till arctan 2x. Uppskatta även avvikelsen från den exakta derivatan.

Lösning: Derivatan av en funktion f i en viss punkt x är definierad som gränsvärdet nedan

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{15.1}$$

Detta gränsvärde kan användas för att med små värden av h numeriskt approximera derivatan till en given funktion, i detta fall arctan 2x.

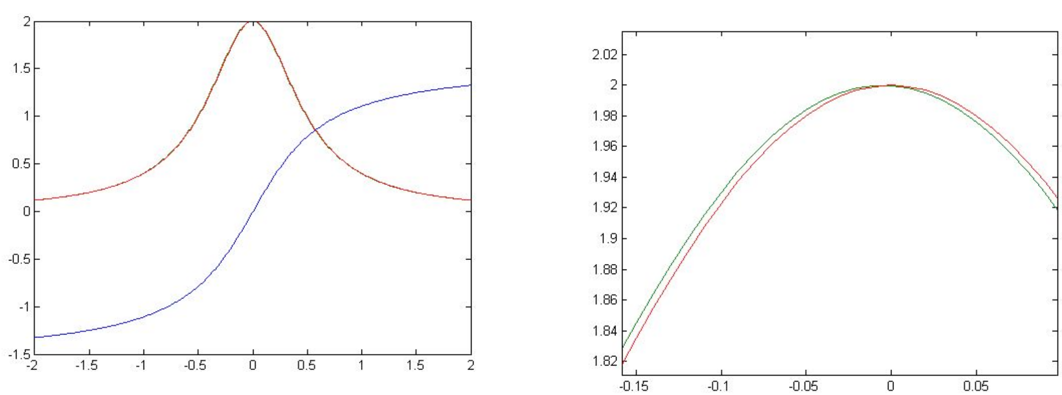
Intervallet som undersöktes sattes till $-1\le x\le 1$, och värdet på h till 0,01. Den ovan angivna funktionen för approximation av gränsvärdet, (15.1), skrivs i MATLAB som

df=(f(x+h)-f(x))/h; (15.2)

För att kunna verifiera den numeriska approximationen av derivatan beräknas den exakta derivatan.

$$\frac{dy}{dx}\arctan 2x=\frac{2}{1+4x^2} \tag{15.3}$$

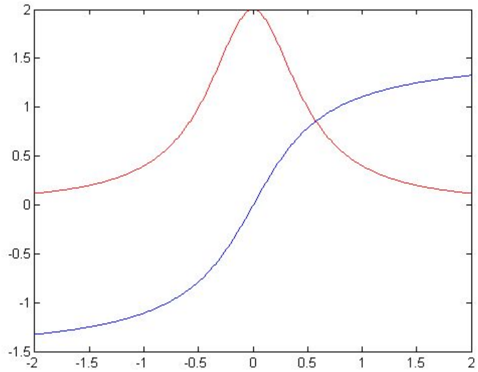
Derivatan plottades tillsammans med den numeriska approximationen av derivatan samt med funktionen arctan 2x.



Figur 15.1: Grafisk representation av funktionen arctan 2x (blåa linjen), dess derivata (gröna linjen) och den numeriska approximation av derivatan med h=0.01 (röda linjen) intervallet $-2\le x\le 2$ *, samt en förstorning av de två sistnämnda.*

Från dessa grafer ser man att den numeriska approximationen av derivatan är nära den riktiga derivatan, men inte tillräckligt exakt. Därför plottas samma funktioner en gång till, men denna gång sätts h-värdet till $1\cdot 10^{-6}$.

Då fås följande graf

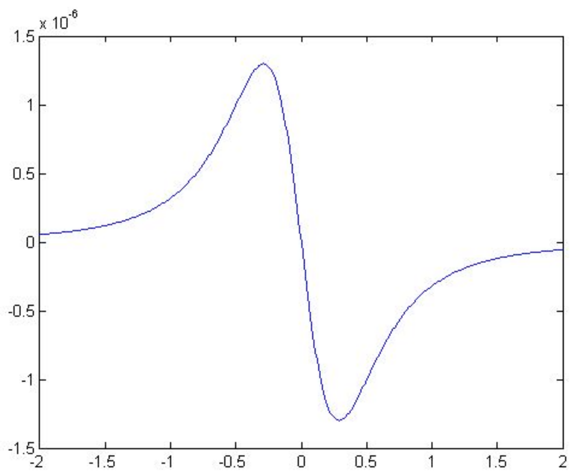


Figur 15.2: Grafisk representation av funktionen arctan 2x(blå linjen), dess derivata (gröna linjen) och den numeriska approximationen av derivatan med $h = 1 \cdot 10^{-6}$ *(röda linjen) i intervallet* $-2 \le x \le 2$

Då h-värdet minskas till$1 \cdot 10^{-6}$, blir approximationen av derivatan så nära den riktiga derivatan att man med hjälp av MATLAB inte kan se någon skillnad mellan de två linjerna för derivatan. Felet kan numeriskt beräknas genom att ta skillnaden mellan den riktiga derivatan och den beräknade derivatan. I Matlab skriver man

plot(x,df-(2./(1+(4*x.^2)))) (15.4)

där df är den approximerade derivatan, och $\dfrac{2}{1+4x^2}$ den exakta derivatan. Plot av avvikelsen visas i figur 15.3 nedan.



Figur 15.3: Avvikelsen mellan den numeriska approximationen av derivatan och den exakta derivatan

Avvikelsen mellan den numeriska approximationen av derivatan och den exakta derivatan ges av figur 15.3. Det maximala felet kan i MATLAB fastställas till $1.299 \cdot 10^{-6}$.

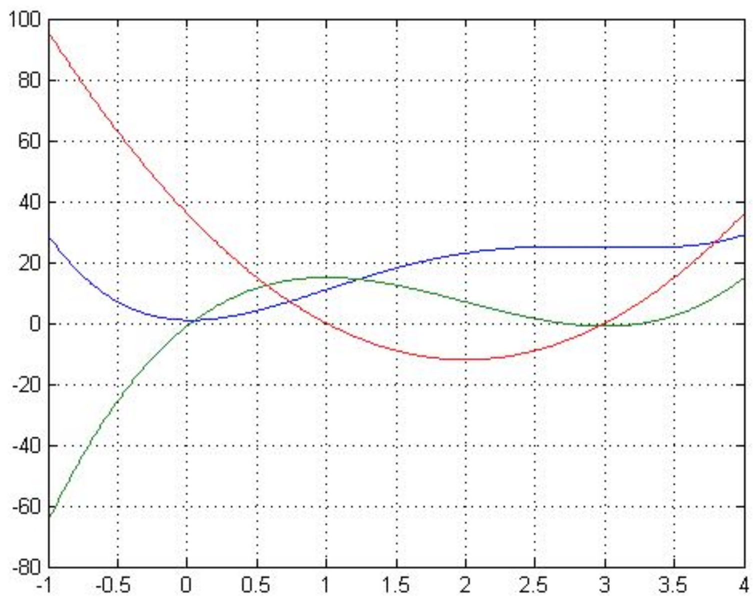
Uppgift 16

Problem: Skriv in följande kommandorader i M ATLAB

f=inline('polyval([1 -8 18 -1 1],x)','x')
*x=-1:0.01:4;h=0.01;df=(f(x+h)-f(x-h))/(2*h);ddf=(f(x+h)-2*f(x)+f(x-h))/(h^2);*
plot(x,f(x),x,df,x,ddf),grid

och utan att titta på koden, avgör vilken linjerna är funktionen, dess första derivata, respektive dess andra derivata.

När grafen plottas i MATLAB fås följande bild



Figur 16.1: Plot av MATLAB-koden

Lösning: När man deriverar ett polynom är dess derivata alltid av ett gradtal mindre än originalfunktionen. Därför kan man dra slutsatsen att linjen med högst gradtal är originalfunktionen, och linjen med lägst gradtal dess andraderivata. Då fås att den blå linjen är originalfunktionen av grad fyra, den gröna linjen är dess förstaderivata, och den röda linjen är dess andraderivata.

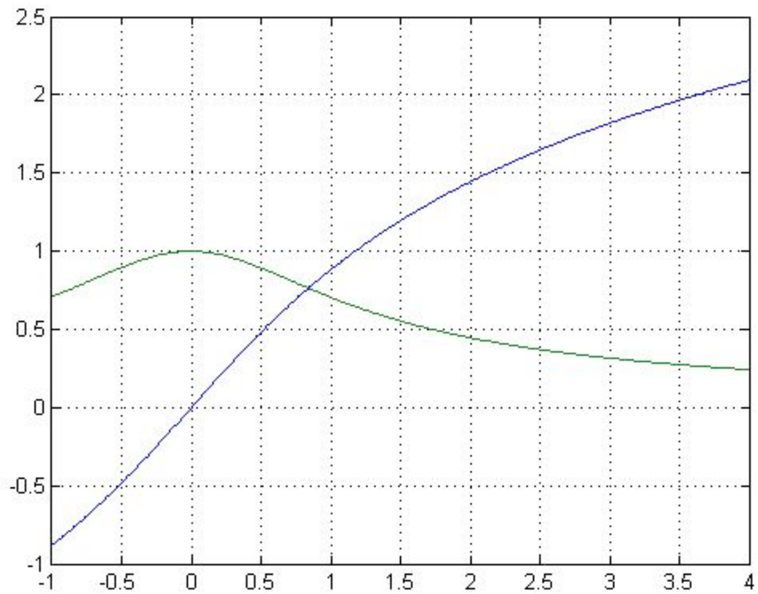
Uppgift 17

Problem: Plotta funktionerna i uppgift 3.11 i övningsboken tillsammans med deras derivator. Försök grafiskt avgöra vilken av funktionerna är kontinuerlig, deriverbar samt har kontinuerlig derivata.

Lösning: Plotta funktionerna och deras derivator.

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \tag{17.1a}$$

$$\frac{dy}{dx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{17.1b}$$



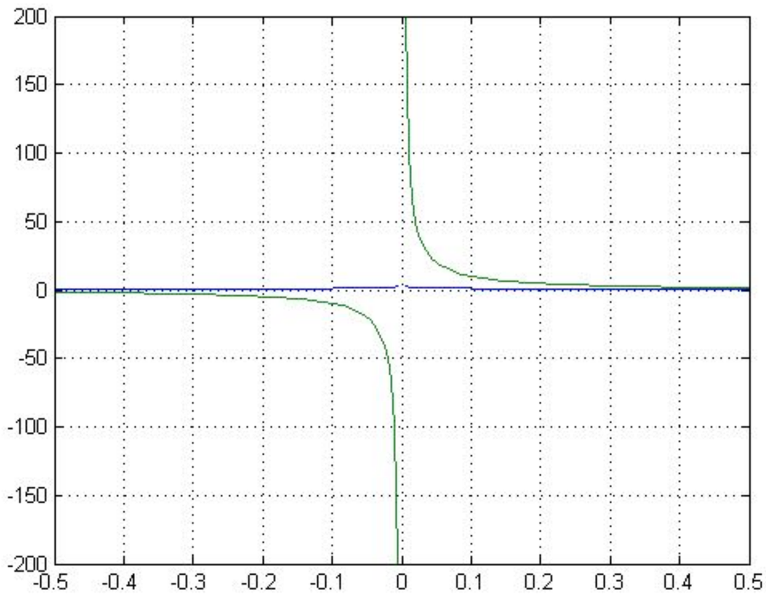
Figur 17.1. Funktionen 17.1a och dess derivata 17.1b. Funktionen är den blåa, och derivatan den gröna linjen.

Ur grafen kan man lätt se att funktionen är kontinuerlig för alla x samt deriverbar i hela intervallet. Även derivatan är kontinuerlig i det valda intervallet -1<x<4.

Betrakta funktionen 17.1a. Den är definierad för alla värden av x. Den är också kontinuerlig i intervallet $-\infty < x < \infty$. Definitionen för en kontinuerlig funktion ges av att $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, för en godtycklig punkt i funktionens definitionsmängd. Detta samband gäller för funktion 17.1a. Dess derivata är också definierad för alla värden på x och är kontinuerlig i intervallet $-\infty < x < \infty$.

$$g(x) = \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \tag{17.2a}$$

$$\frac{dy}{dx} g(x) = \frac{1}{x(1+x^2)} \tag{17.2b}$$



Figur 17.2. Funktionen 17.2a och dess derivata 17.2b. Den blåa linjen är funktionen, den gröna linjen dess derivata

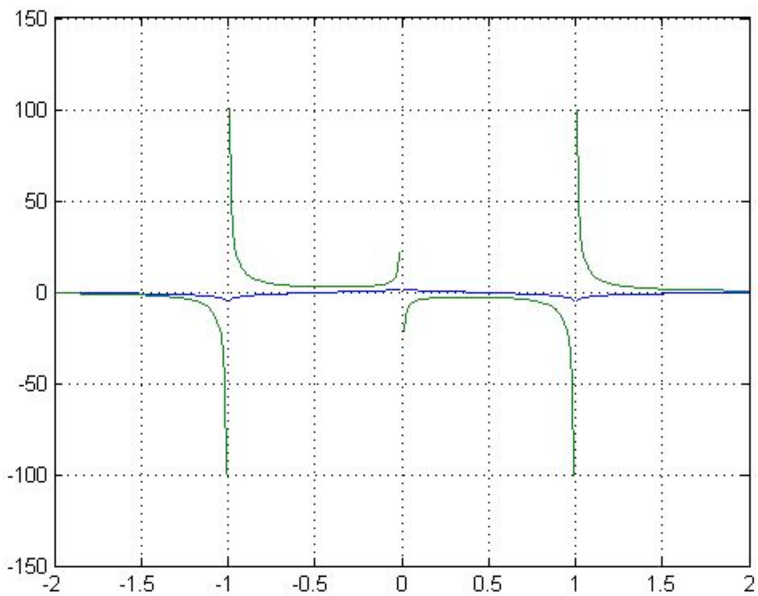
Ur grafen kan avläsas att funktionen är kontinuerlig i intervallen -0.5 ≤ x < 0 och 0 < x ≤ 0.5. Även derivatan är kontinuerlig i samma intervall. Funktionen är deriverbar i det kontinuerliga intervallet.

Betrakta funktion 17.2a. I punkten x=0 får funktionen värdet ln 0/1 vilket inte är definierad. Funktionen är alltså kontinuerlig i intervallet $-\infty < x < 0, \quad 0 < x < \infty$. Derivatan är inte heller definierad för x=0. Derivatan är även den kontinuerlig i intervallet $-\infty < x < 0, \quad 0 < x < \infty$. Slutsats: Både f(x) och f'(x) inte kontinuerliga.

$$\lim_{x \to 0^+} g'(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 0^-} g'(x) = -\infty$$

$$k(x) = \ln|\ln|x|| \tag{17.3a}$$

$$\frac{dy}{dx}k(x) = \frac{1}{x\ln|x|} \tag{17.3b}$$



Figur 17.3 Funktionen 17.3a och dess derivata 17.3b. Den blåa linjen är funktionen, den gröna linjen dess derivata

Av grafen kan avläsas att funktionen är kontinuerlig i intervallen $-2 \le x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x \le 2$, men inte i x=-1, x=0 och x=1. Dess derivata är också kontinuerlig i samma intervall. Funktionen är deriverbar i de tre intervallen.

Betrakta funktion 17.3a. x=-1, x=0 och x=1 är ej definierade. I x= 0 är funktionen ej definierad eftersom ln0 inte är definierad. Samma gäller om x = -1 eller x=1. Eftersom ln1 = 0, är ln(ln1) inte definierad. Funktionen är kontinuerlig i intervallen $-\infty < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x < \infty$. Funktionen är alltså inte kontinuerlig.

Derivatan är inte heller definierad i x=-1, x=0 och x=1. Absolutbeloppet av -1 är 1 och ln1 är 0. När funktionen går mot x=-1 från höger fås + ∞, och när den går mot -1 från vänster fås -∞. Samma gäller även x=1. Vid x =0 är derivatan inte är definierad eftersom ln0 inte är definierad. Derivatan är kontinuerlig i intervallen $-\infty < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x < \infty$. Av det kan man dra slutsatsen att derivatan inte heller är kontinuerlig.

Uppgift 18

Problem: Bestäm en metod för numerisk beräkning av tredjederivatan och plotta med hjälp av denna tredjederivatan av f(x)= xe^x, utan att använda det exakta uttrycket på derivatan.

Lösning: Använd uttrycket för första derivatan av funktionen f(x)

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{18.1}$$

För att finna andra derivatan deriveras definitionen av första derivatan.

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{df}{dx}(x+h) - \frac{df}{dx}(x)\right) \tag{18.2}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \tag{18.3}$$

Andra derivatan är alltså

$$f''(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \tag{18.4}$$

Funktionen deriveras igen för att finna tredje derivatan

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(\frac{df}{dx}(x+2h) - \frac{df}{dx}(x+h) + \frac{df}{dx}(x)\right) \tag{18.5}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(\frac{f(x+3h) - f(x+2h)}{h} - \frac{2f(x+2h) - 2f(x+h)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \tag{18.6}$$

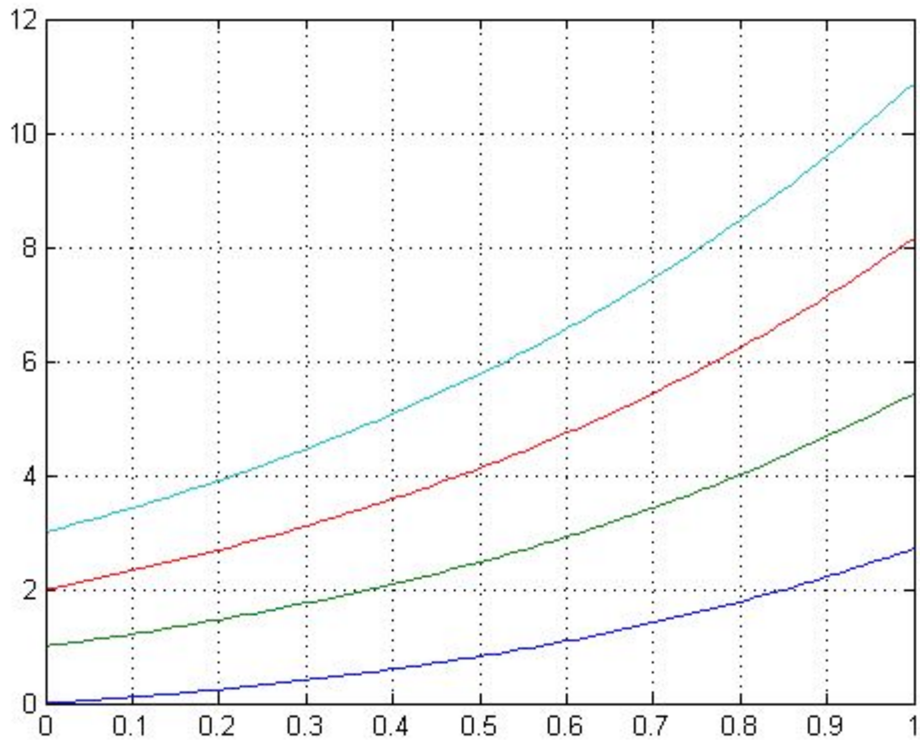
Det sökta uttrycket för tredjederivatan ges av

$$f'''(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) - 3f(x+h) - f(x)}{h^3} \tag{18.7}$$

I MATLAB skrivs andraderivatan som

*df2=(f(x+2*h) -2*f(x+h) + f(x))/h^2;* (18.8)
och tredjederivatan som

*df3=(f(x+3*h) -3*f(x+2*h) + 3*f(x+h) -f(x))/h^3* (18.9)



Figur 18.1: Plot av funktionen xe^x *tillsammans med dess första, andra och tredjederivator*

De numeriskt approximerade värdena för derivatorna bekräftas genom att beräkna de exakta första, andra och tredjederivatorna för funktionen.

$f(x) = xe^x$

$f'(x) = xe^x + e^x$

$f''(x) = xe^x + 2e^x$

$f''(x) = xe^x + 3e^x$

Då x är noll är f(x) = 0, f’(x) = 1, f’’(x) = 2 och f’’’(x) = 3. Detta resultat verifieras av figur 18.1.