Datorövning i MATLAB

för envariabelanalys

David Andersson

Milan Yazdanfar

Rapport
Envariabelanalys
(5B1147)
Handledare: Karim Daho
Stockholm, den 1:a mars 2007

Innehåll

Uppgift 2.36 (Övningshäftet) 1
Lösning: 1
Svar: 2
Uppgift 2.37a (Övningshäftet) 3
Lösning: 3
Svar: 3
Uppgift 2.37b (Övningshäftet) 4
Lösning: 4
Svar: 4
Uppgift 2.37c (Övningshäftet) 5
Lösning: 5
Svar: 6
Uppgift 10a 7
Lösning: 7
Svar: 7
Uppgift 10b 9
Lösning: 9
Svar: 9
Uppgift 11 10
Lösning: 10
Svar: 10
Uppgift 12 11
Lösning: 11
Svar: 11
Uppgift 13 13
Lösning: 13
Svar: 14
Uppgift 14 15
Lösning: 15
Svar: 15
Bilaga 17

Uppgift 2.36 (Övningshäftet)

Beräkna:

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}} \right)$$

Lösning:

$$\arccos(x) = y$$

$$\cos(\arccos(x)) = \cos(y)$$

$$\mathrm{x} = \cos(y)$$

$$x \to 1^-, y \to 0$$

$$\cos(0) = 1$$

$$\lim_{y \to 0} \left(\frac{\mathrm{y}}{\sqrt{1-\cos(y)}} \right)$$

$$1 - \cos(y) = 2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$\lim_{y \to 0} \left(\frac{\mathrm{y}}{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}} \right)$$

$$\lim_{y \to 0} \left(\frac{\mathrm{y}}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \right)$$

Vi vet att $\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1 => \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$

$$\lim_{y \to 0} \left(\frac{\mathrm{y}}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{y \to 0} \left(\frac{\mathrm{y}}{sin\left(\frac{y}{2}\right)} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{y \to 0} \left(\frac{\mathrm{y}\frac{2}{2}}{sin\left(\frac{y}{2}\right)} \right)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{y \to 0} \left(\frac{\frac{y}{2}}{sin\left(\frac{y}{2}\right)} \right)$$

$$\lim_{y \to 0} \left(\frac{\frac{y}{2}}{sin\left(\frac{y}{2}\right)} \right) = 1$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{y \to 0} \left(\frac{\frac{y}{2}}{sin\left(\frac{y}{2}\right)} \right) => \frac{2}{\sqrt{2}} => \sqrt{2}$$

Svar:

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}} \right) = \sqrt{2}$$

Uppgift 2.37a (Övningshäftet)

Beräkna samtliga asymptoter till:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Lösning:

Om $\lim_{x \to a} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \infty \to x = a$ lodrät asymptot

För att $f(x)$ skall gå mot ∞ måste nämnaren vara 0, vi får då:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

Om $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = b \to y = b$ vågrät asymptot

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Vi dividerar varje term med x^2

$$=> \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$=> \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$=> \frac{1 + \frac{1}{\infty^2}}{1 - \frac{1}{\infty^2}}$$

$$=> \frac{1+0}{1-0}$$

$$=> 1$$

Svar:

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ har följande asymptoter:

Lodräta asymptoter är $x_1 = 1, x_2 = -1$

Vågrät asymptot är $y = 1$

Uppgift 2.37b (Övningshäftet)

Beräkna samtliga asymptoter till:

$$f(x) = \left(\frac{\ln x}{x-2}\right), x > 0$$

Lösning:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{\ln x}{x-2}\right) = +\infty => x = 2 \text{ lodrät asymptot}$$

Om x går mot 0 från höger

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x-2}\right)$$

$$\left(\frac{-\infty}{0-2}\right) = \infty$$

$$x = 0^+ \text{ är en lodrät asymptot}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln x}{x-2}\right)$$

$$\frac{\ln \infty}{\infty - 2} = 0$$

Nämnaren går mycket fortare mot oändligheten jämfört mot täljaren, dvs. bråket blir 0

$$y = 0 \text{ är en vågrät asymptot}$$

Svar:

$f(x) = \left(\frac{\ln x}{x-2}\right), x > 0$ har följande asymptoter:

Lodrätta asymptoter är $x_1 = 2, x_2 = 0^+$

Vågrät asymptot är $y = 0$

Uppgift 2.37c (Övningshäftet)

Beräkna samtliga asymptoter till:

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}, x > 0$$

Lösning:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \ln x}{x-1}$$

$$\frac{1 \ln 1}{1-1}$$

$$\frac{1 \cdot 0}{0}$$

$$\frac{0}{0}$$

Lodrät asymptot saknas

$$\frac{0}{0} \neq \infty$$

Vi söker nu en vågrät asymptot:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x \ln x}{x-1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x \ln x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\frac{\ln \infty}{1 - \frac{1}{\infty}}$$

$$\frac{\infty}{1-0} = \infty$$

Det finns ingen vågrät asymptot. Vi kan då söka efter sneda asymptoter:

$$y = kx + m$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = ETT\ TAL$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x \ln x}{x-1}}{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\frac{\ln \infty}{\infty - 1} = 0 \ (ETT\ TAL)$$

Ty, nämnaren går mycket fortare mot oändligheten jämfört mot täljaren.

Vi söker skärningspunkten i y-axeln:

$$m = \lim_{x \to \infty} (f(x) - k\,x)$$

I vårt fall k = 0

$$m = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$=> m = \lim_{x \to \infty} \frac{x \ln x}{x-1}$$

$$=> m = \lim_{x \to \infty} \frac{x \ln x}{x-1}$$

$$=> m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x \ln x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}$$

$$=> m = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$=> m = \frac{\ln \infty}{1 - \frac{1}{\infty}}$$

$$=> m = \frac{\infty}{1 - 0} = \infty \ (EJ\ ETT\ TAL)$$

Detta betyder att funktionen saknar sneda asymptoter.

<u>Svar:</u>

$f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}, x > 0$ saknar asymptoter.

Uppgift 10a

Undersök med hjälp av plottning några av gränsvärdena i övningsuppgift 2.33a. Försök sedan beräkna gränsvärdena exakt.

$$\lim_{n \to \infty} \binom{2n}{n}$$

Lösning:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

När n går mot oändlighet är (2n)! mycket större än n!n!

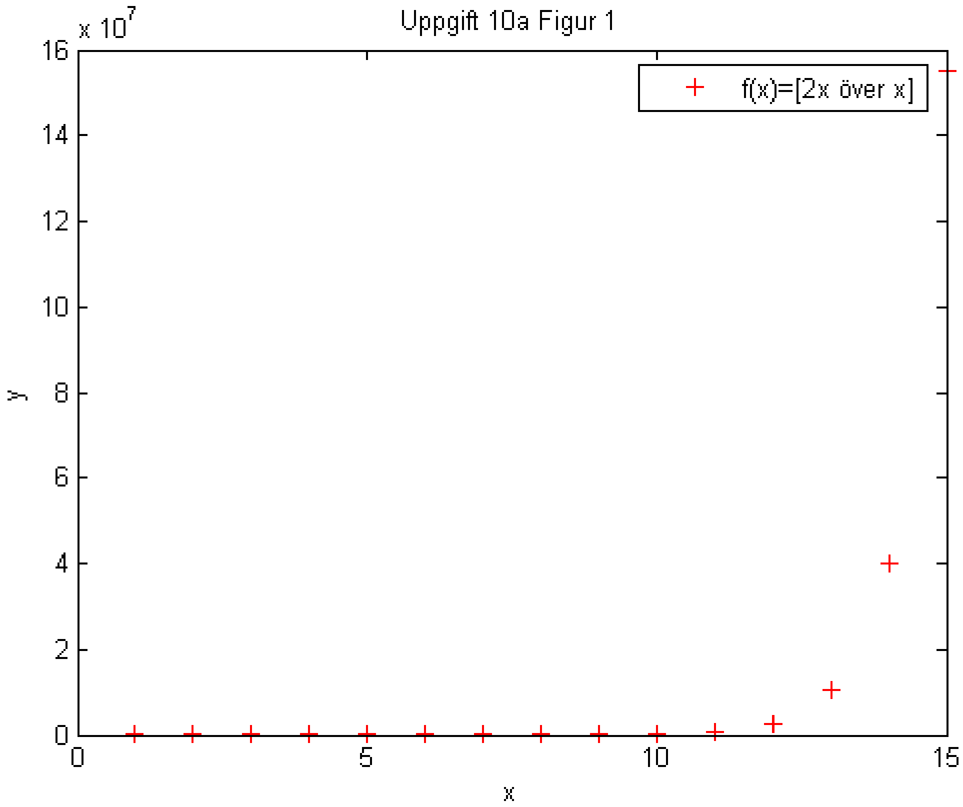
$$\frac{(2\infty)!}{\infty!\,\infty!} = \infty$$

Som exempel ser man att om n=2 är täljaren redan 6 gånger större.

$$n = 2 => \frac{(4)!}{2!\,2!} = \frac{24}{4}$$

Svar:

$$\lim_{n \to \infty} \binom{2n}{n} = \infty$$


Uppgift 10a Figur 1
x 10^7
16
14
12
10
8
6
4
2
0
y
0
5
10
15
x
f(x)=[2x över x]

Uppgift 10b

Undersök med hjälp av plottning några av gränsvärdena i övningsuppgift 2.33b. Försök sedan beräkna gränsvärdena exakt.

$$\lim_{n \to \infty} \binom{2n}{n} 2^{-n}$$

Lösning:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} 2^{-n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n)!}{n!\,n!} \frac{1}{2^n} = \infty$$

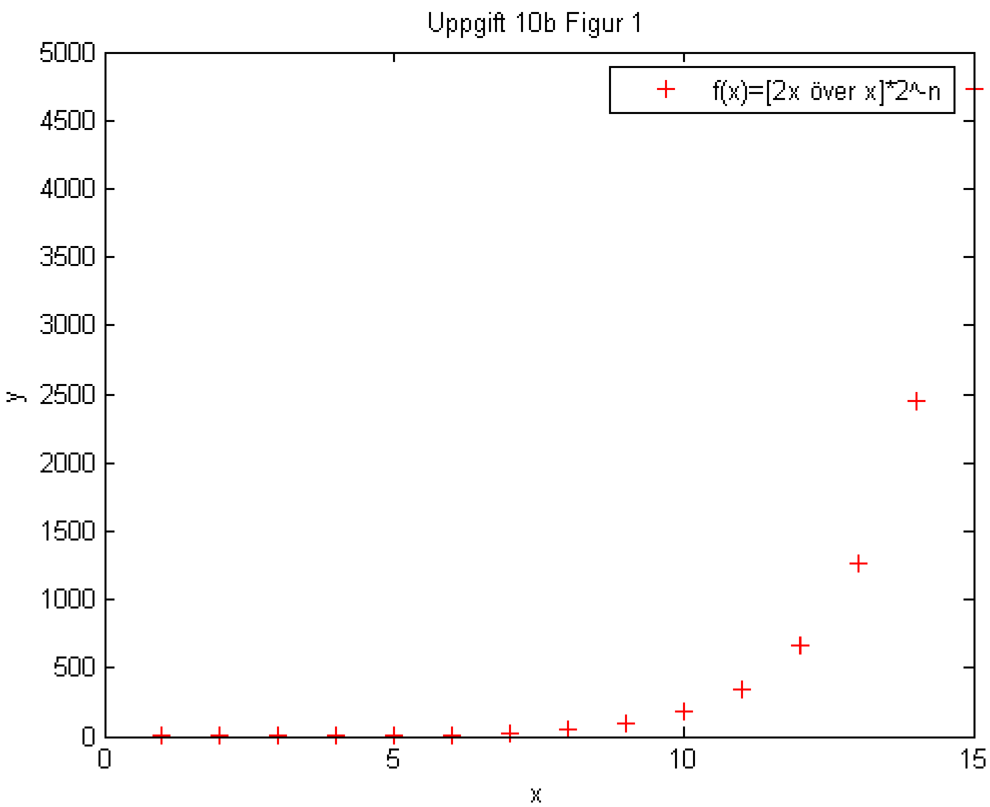
När n går mot oändlighet är (2n)! mycket större än n!n! 2^n

Som exempel ser man att om n=2 är täljaren större än nämnaren.

$$n = 2 => \frac{(4)!}{2!\,2!} \frac{1}{2^2} = \frac{24}{16}$$

Svar:

$$\lim_{n \to \infty} \binom{2n}{n} 2^{-n} = \infty$$



Uppgift 11

Undersök höger- och vänstergränsvärde i $x = 0$ av funktionen $\arctan\frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \arctan\frac{1}{x}, x \neq 0$$

Lösning:

Från höger

$$\frac{1}{\mathrm{x}} = \mathrm{t}$$

$$x \to 0^+$$

$$\mathrm{t} \to \frac{1}{0^+}$$

$$\mathrm{t} \to \infty$$

$$\lim_{t \to \infty} \arctan(\mathrm{t}) = \frac{\pi}{2}$$

Från vänster

$$\lim_{t \to -\infty} \arctan(\mathrm{t}) = -\frac{\pi}{2}$$

Svar:

$\arctan(\mathrm{x}) \to \frac{\pi}{2}$ då $\mathrm{x} \to \infty$ och $\arctan(\mathrm{x}) \to -\frac{\pi}{2}$ då $\mathrm{x} \to -\infty$

Uppgift 12

Undersök gränsvärdet $\lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Plotta med logaritmisk skalning av x-axeln. Förklara den bild du får upp.

$$\lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Lösning:

$$\frac{1}{x} = t$$

$$x \to 0^+$$

$$t \to \frac{1}{0^+}$$

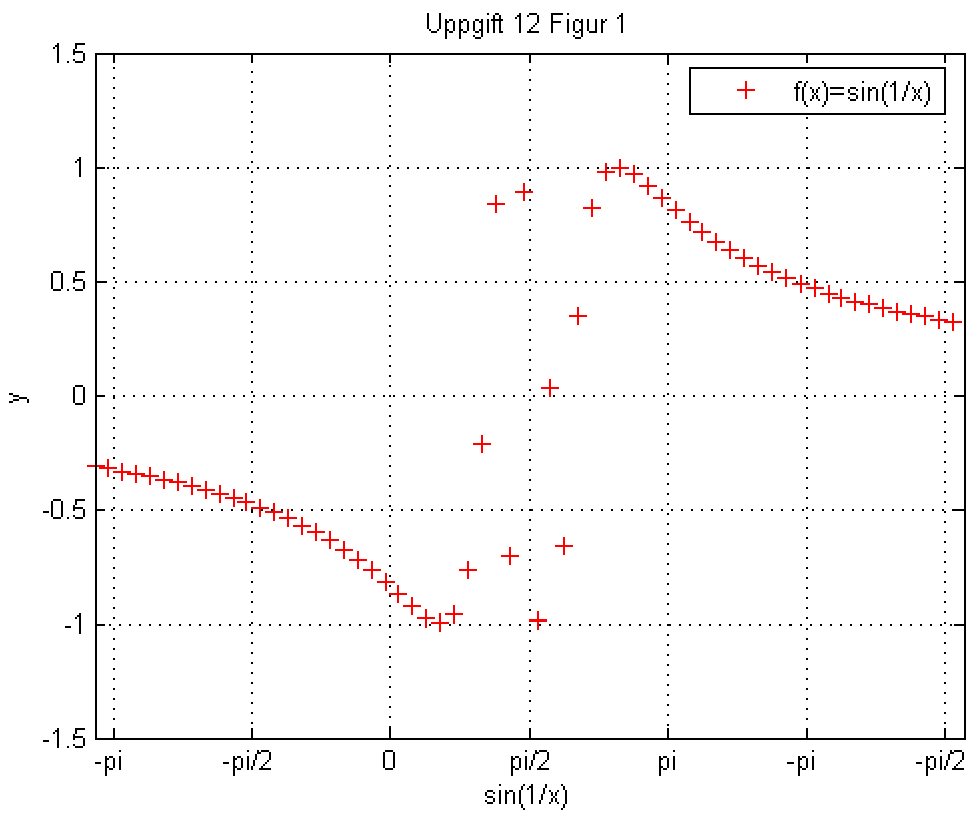
$$t \to \infty$$

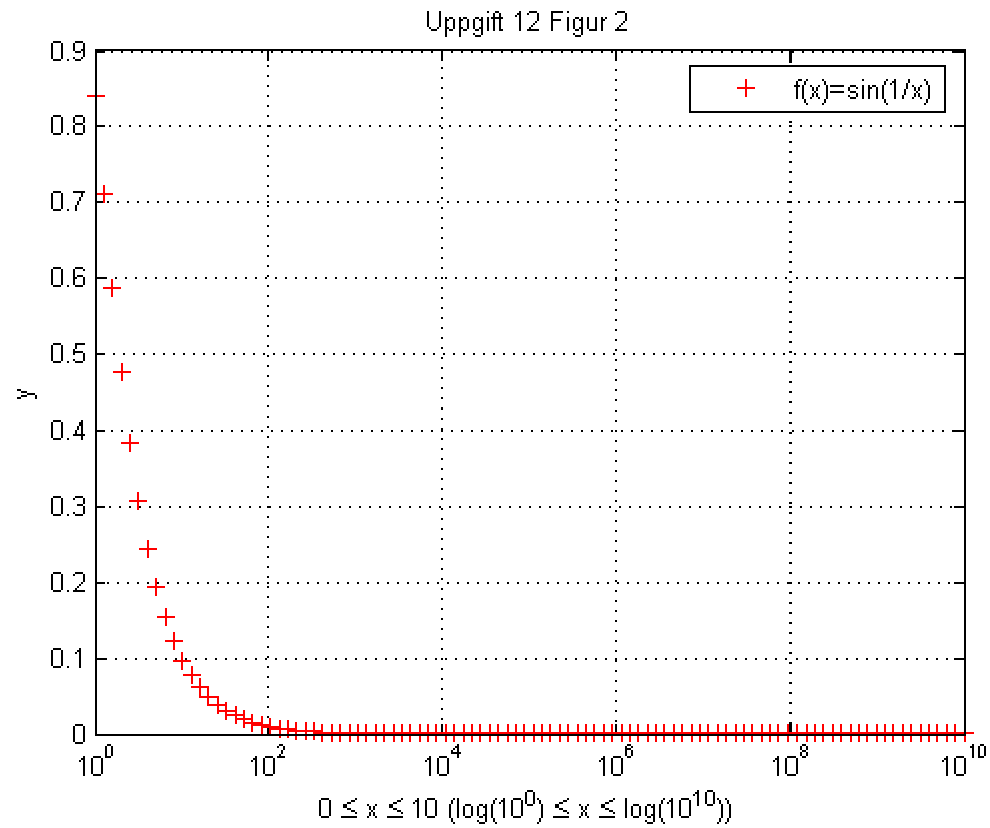
$$\lim_{t \to \infty} \sin(t) = \text{existetar inte}$$

$$\text{eftersom} - 1 \ \leq \sin(t) \leq 1$$

Svar:

$$\lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \text{existetar inte}$$


Uppgift 12 Figur 1
f(x)=sin(1/x)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
y
-pi
-pi/2
0
pi/2
pi
-pi
-pi/2
sin(1/x)


Uppgift 12 Figur 2
f(x)=sin(1/x)
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
y
10^0
10^2
10^4
10^6
10^8
10^{10}
$0 \le x \le 10$ ($\log(10^0) \le x \le \log(10^{10})$)

Uppgift 13

Använd uttrycket $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ för att bestämma ett bra nämndevärde till e.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Lösning:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3}\ a^{n-3} b^3 \dots.\ \binom{n}{n-1}\ a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

I vårt fall är a = 1, $b = \frac{1}{n}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n!}{0!\,(n-0)!}\right) 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \left(\frac{n!}{1!\,(n-1)!}\right) 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 \dots \left(\frac{n!}{(n-1)!\,(n-n+1)!}\right) 1^1 \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + \left(\frac{n!}{n!\,(n-n)!}\right) 1^0 \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^0 = 1$$

$$0! = 1$$

$$\frac{n!}{(n-1)!\,n} = 1\ ty, n! = n(n-1)!$$

Vi beräknar term för term

$$\left(\frac{n!}{0!\,(n-0)!}\right) 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 = \left(\frac{n!}{n!}\right) 1 \cdot 1 = 1$$

$$\left(\frac{n!}{1!\,(n-1)!}\right) 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 = \left(\frac{n!}{(n-1)!}\right) 1 \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n!}{(n-1)!\,n} = 1$$

$$\left(\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\right) 1^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!\,n^2} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!\,(n-2)!\,n^2}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2!\,n^2}$$

$$= \frac{n-1}{2n}$$

$$= \frac{n-1}{2n} \text{ den går mot } \frac{1}{2} \text{ då } n \to \infty$$

$$\left(\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\right)1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{n!}{3!\,(n-3)!}\right)1^{n-3}\left(\frac{1}{n}\right)^{3} = \frac{n!}{3!\,(n-3)!\,n^3} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!\,(n-3)!\,n^3}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}$$

$$= \frac{n^3-3n^2+2n}{6n^3}$$

$$= \frac{n^3-3n^2+2n}{6n^3} \text{ den går mot } \frac{1}{6} \text{då } n \to \infty$$

$$\left(\frac{n!}{3!\,(n-3)!}\right)1^{n-3}\left(\frac{1}{n}\right)^{3} = \frac{1}{6}$$

<u>Svar:</u>

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}\dots\dots\frac{1}{n^n}$$

$$\approx 2{,}717$$

Uppgift 14

Undersök med hjälp av plottning vad som händer med uttrycket $\sin\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right)$ då

a) x är ett heltal som går mot oändligheten.
b) x är ett reellt tal som går mot oändligheten.

Förklara eventuella skillnader!

$$\underset{x \to \infty}{lim} \sin\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right)$$

Lösning:

$$\underset{x \to \infty}{lim} \sin\left(\frac{\frac{\pi x^2}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}\right)$$

$$\underset{x \to \infty}{lim} \sin\left(\frac{\pi x}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$sin\left(\frac{\pi\infty}{1+\frac{1}{\infty}}\right)$$

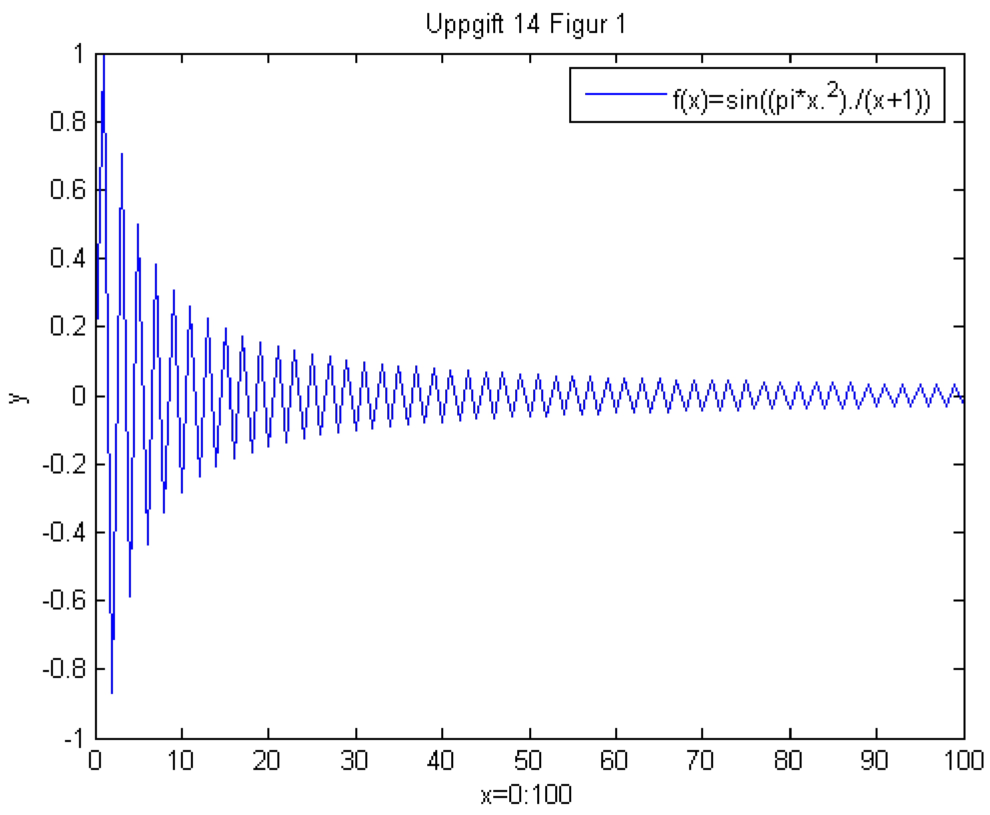
$$sin(\infty)$$

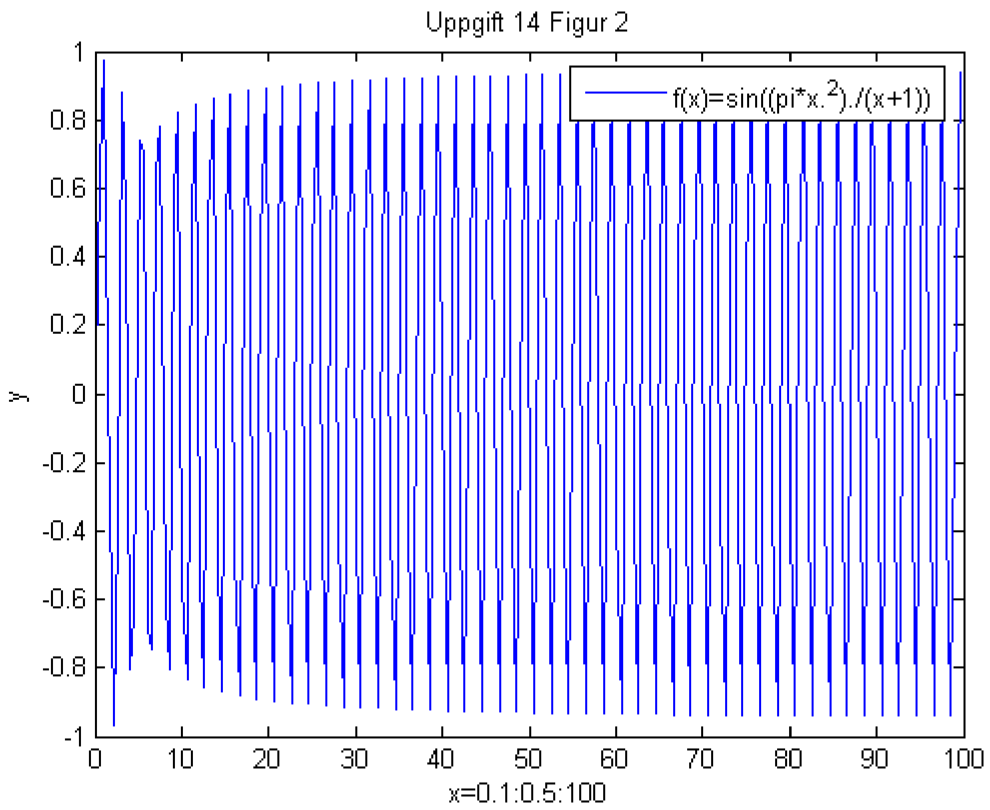
Svar:

Men om x är ett heltal blir det 0 $\underset{x \to \infty}{lim} \sin\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right) = \underset{x \to \infty}{lim} \sin(\pi x)$

Om x = 0,1,2,3 … n $\underset{x \to \infty}{lim} \sin(\pi x)$, vilket blir en multipel av π eftersom att sin(π) alltid är 0. Se Figur 1.

Med undantag $\underset{x \to \infty}{lim} \sin\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right)$ är ej definierad då $-1 \leq \sin(x) \leq 1, x \in$ R detta framgår av Figur 2.


Uppgift 14 Figur 1
f(x)=sin((pi*x.^2)./(x+1))
y
x=0:100
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


Uppgift 14 Figur 2
f(x)=sin((pi*x.^2)./(x+1))
y
x=0.1:0.5:100
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

Bilaga

Nedan följer den Matlab-kod som använts för att verifiera tillhörande uppgifter ovan.

Uppgift 2.36

```
>> syms x
>> limit(acos(x)/sqrt(1-x),x,1,'right')

 ans = 2^(1/2)
```

Uppgift 2.37a

```
>> limit((x^2+1)/(x^2-1),x,1)

ans = NaN

>> limit((x^2+1)/(x^2-1),x,-1)

 ans = NaN

>> limit((x^2+1)/(x^2-1),x,Inf)

ans = 1
```

Uppgift 2.37b

```
>> limit((log(x))/(x-2),x,2)

 ans = NaN

>> limit((log(x))/(x-2),x,2,'right')

 ans = Inf

>> limit((log(x))/(x-2),x,2,'left')

 ans = -Inf

>> limit((log(x))/(x-2),x,Inf)

 ans = 0
```

Uppgift 2.37c

```
>> limit((x*log(x))/(x-1),x,Inf)

 ans = Inf

>> limit((x*log(x))/(x-1)/x,x,Inf)

ans = 0
```

Uppgift 10a

```
>> n = 15;
>> y = [];
>> x = 1:n;
>> f=inline('nchoosek(2*n,n)','n')
>> for i=1:n
>>  y(i) = f(i);
>> end
>> plot(x,y,'r+')
>> title('Uppgift 10a Figur 1')
>> ylabel('y')
>> xlabel('x')
>> legend('f(x)=[2x över x]')
```

Uppgift 10b

```
>> n = 15;
>> y = [];
>> x = 1:n;
>> f=inline('nchoosek(2*n,n)*2^-n','n')
>> for i=1:n
>>  y(i) = f(i);
>> end
>> plot(x,y,'r+')
>> title('Uppgift 10b Figur 1')
>> ylabel('y')
>> xlabel('x')
>> legend('f(x)=[2x över x]*2\^-n')
```

Uppgift 11

```
>> syms x
>> limit(atan(1/x),x,0,'right')

 ans = 1/2*pi

>> limit(atan(1/x),x,0,'left')

ans = -1/2*pi
```

Uppgift 12

```
>> limit(sin(1/x),x,0,'right')

 ans = -1 .. 1
```

Figur 1

```
>> x=-pi:.1:pi;
>> plot(x,sin(1./x),'r+')
>> title('Uppgift 12 Figur 1')
```

```
>> ylabel('y')
>> xlabel('sin(1/x)')
>> legend('f(x)=sin(1/x)')
>> axis([-pi pi -1.5 1.5])
>> grid
>> set(gca,'XTickLabel',{'-pi','-pi/2','0','pi/2','pi'})
```

Figur 2

```
>> x=logspace(0,10,100);
>> y=sin(1./x);
>> semilogx(x,y,'r+')
>> title('Uppgift 12 Figur 2')
>> ylabel('y')
>> xlabel('0 \leq x \leq 10 (log(10^0) \leq x \leq log(10^1^0))')
>> legend('f(x)=sin(1/x)')
>> grid
```

Uppgift 14

```
>> syms x
>> limit(sin((pi*x^2)/(x+1)),x,Inf)

ans = -1 .. 1

>> x=0:100;
>> y=sin((pi*x.^2)./(x+1));
>> plot(x,y)
>> title('Uppgift 14 Figur 1')
>> ylabel('y')
>> xlabel('x=0:100')
>> legend('f(x)=sin((pi*x.^2)./(x+1))')

>> x=0.1:.5:100;
>> y=sin((pi*x.^2)./(x+1));
>> plot(x,y)
>> title('Uppgift 14 Figur 2')
>> ylabel('y')
>> xlabel('x=0.1:0.5:100')
>> legend('f(x)=sin((pi*x.^2)./(x+1))')
```