5B1147

Envariabelanalys

Laboration

Serier

Andreas Karlsson

andrekar@kth.se

Innehåll

Uppgift 30

Problem:

Beräkna de 1000 första delsummorna till följande serier och försök avgöra om de är konvergenta eller divergenta:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{0.99}}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.01}}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} 2\arctan(k) - \pi$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

Lösning:

Vi plottar alla kurvorna i MATLAB:

a)

<kod>
```
s(1)=1./(1.^0.99);
for n=2:1000
    s(n)=s(n-1)+1./(n.^0.99);
end;
plot(s);
```
</kod>

b)

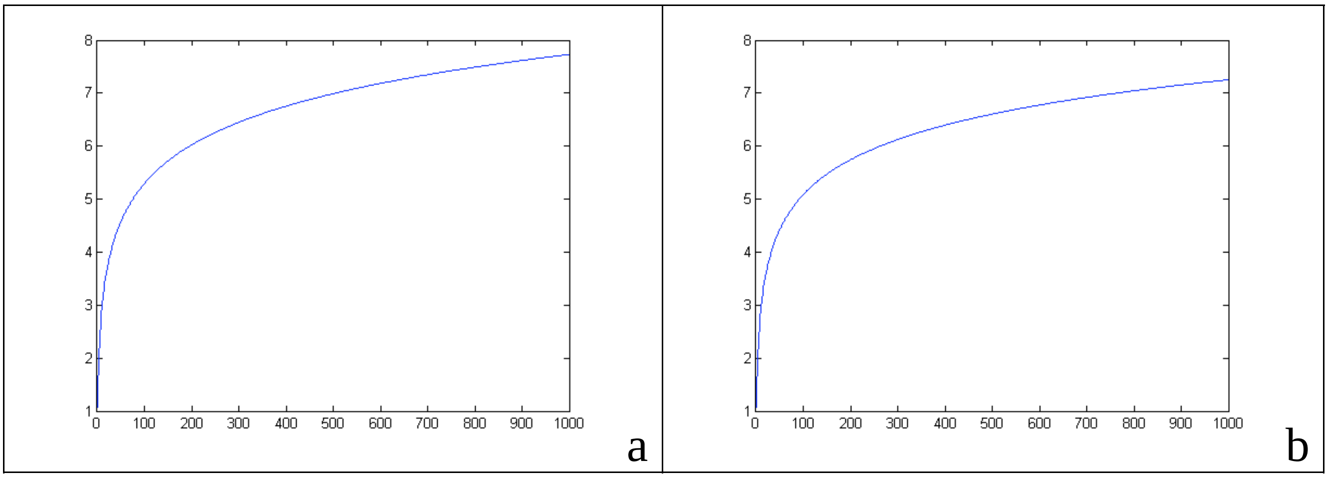
</kod>
```
s(1)=1./(1.^1.01);
for n=2:1000
    s(n)=s(n-1)+1./(n.^1.01);
end
plot(s);
```
</kod>

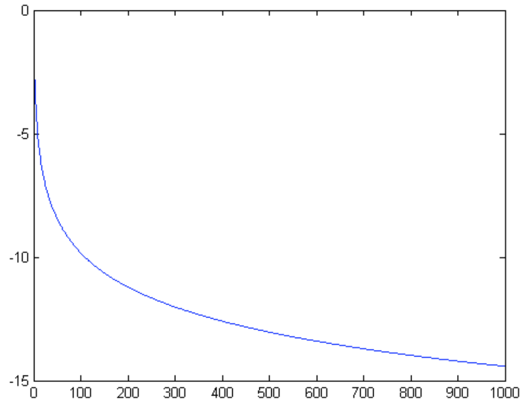
c)

<kod>
```
s(1)=2*atan(1)-pi;
for n=2:1000
    s(n)=s(n-1)+2*atan(n)-pi;
end
plot(s);
```
</kod>

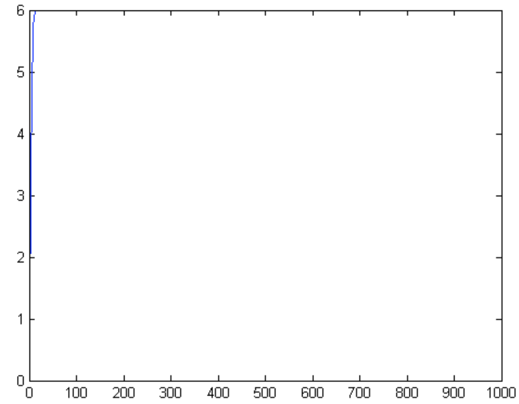
d)

<kod>
```
s(1)=(1^2)/(2^1);
for n=2:1000
    s(n) = s(n-1)+ (n^2)/(2^n);
end;
plot(s);
```
</kod>





c



d

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{0.99}}$

Vi kan jämföra denna serie med integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$ som $konvergerar\ då\ \alpha > 1, och\ divergerar\ om\ \alpha \leq 1$

Eftersom att integralen divergerar kan vi inte direkt säga något om kurvan, eftersom att summan $\leq$ integralen. Serien måste dock vara konvergent, eftersom att gränsvärdet går mot noll.

K:	Summa:
1	1.00000000000000
1000	7.72895321728473
2000	8.47398788328856
3000	8.91227246248543
4000	9.22433855868401
5000	9.46702270911877
6000	9.66571654093319
7000	9.83399500157689
8000	9.97997575569363
9000	10.10890281639719
10000	10.22436145959558

Vi ser att skillnaden mellan summorna avtar mer ju högre k-värde vi väljer.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.01}}$

Vi kan jämföra denna serie med integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$ som k$onvergerar\ då\ \alpha > 1, och\ divergerar\ om$ $\alpha \leq 1$. Eftersom att integralen i detta fall konvergerar så kommer serien att bli $\leq$ integralen + f(1). Vi kollar också om f(1) = $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^{1.01}}$ är konvergent. Så är fallet, och konvergens + konvergens = konvergens, så serien måste vara konvergent.

K:	Summa:
1	1.00000000000000
1000	7.25297980739927
2000	7.89739077537291
3000	8.27234035277468
4000	8.53746707888675
5000	8.74259753071073
6000	8.90986534288653
7000	9.05105255592066
8000	9.17317996422077

9000	9.28076955211069
10000	9.37690500268027

Vi ser att skillnaden mellan summorna avtar mer ju högre k-värde vi väljer.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} 2\arctan(k) - \pi$

Serien är konvergent, eftersom att gränsvärdet går mot 0 (pi - pi).

K:	Summa:
1	-1.57079632679490
1000	-14.41979136523265
2000	-15.80558560164401
3000	-16.61634912807472
4000	-17.19162993155013
5000	-17.63786703043096
6000	-18.00247680864960
7000	-18.31075435755248
8000	-18.57779928486168
9000	-18.81335146673910
10000	-19.02406138655273

Vi ser att skillnaden mellan summorna avtar mer ju högre k-värde vi väljer.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

Serien är konvergent, eftersom att nämnaren växer mycket snabbare än täljaren vid stora värden på k, och därför kommer hela uttrycket att gå mot 0. Om gränsvärdet går mot 0 så är serien konvergent.

K:	Summa:
1	0.50000000000000
5	4.40625000000000
10	5.85742187500000
15	5.99111938476563
20	5.99953651428223
25	5.99997821450233
30	5.99999904446304
35	5.99999996009865
40	5.99999999839383
45	5.99999999993716
50	5.99999999999760

K:	K^2	2^k	K^2/2^k
1	1	2	0.50000000000000
2	4	4	1
3	9	8	1.12500000000000
4	16	16	1
5	25	32	0.78125000000000
6	36	64	0.56250000000000
7	49	128	0.38281250000000
8	64	256	0.25000000000000
9	81	512	0.15820312500000
10	100	1024	0.09765625000000
11	121	2048	0.05908203125000
12	144	4096	0.03515625000000
13	169	8192	0.02062988281250

Vi ser att 2^k växer mycket fortare än k^2, och är större för k>4, så kvoten kommer att gå mot 0.

Serien verkar gå mot värdet 6.

Uppgift 31

Problem

Använd kommandot *sum* för att beräkna ett approximativt värde på den konvergenta serien $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$. Beräkna sedan seriens exakta värde med hjälp av formel för geometriska summor

Lösning

```
<kod>
x = [1:1:100000];
y = exp(-x);
z = sum(y)
</kod>
```

Ger: 0.58197670686933 i MATLAB.

VI kan även räkna ut detta exakt med formeln för geometriska summor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k - \left(\frac{1}{e}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} - 1 \approx 0.58197670686933$$

Uppgift 32

Problem

Man kan visa att $\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ *för* $-1 < x \leq 1$. Undersök VL och HL i denna identitet för några olika värden på x. Bekräftar dina iakttagelser att identiteten verkar stämma?

Lösning

Vi matar in allt i MATLAB och kollar av funktionsvärdena på spridda x-värden.

```
<kod>
x = -0.9;
k = [1:1:1000];
y = ((-1).^(k-1)).*((x.^k)./k);
z = sum (y)
r = log(x + 1)
</kod>
```

X:	Summa	Log(x+1)	Differens:
-0.9	-2.30258509299405	-2.30258509299405	0
-0.8	-1.60943791243410	-1.60943791243410	0.00000000000000
-0.7	-1.20397280432594	-1.20397280432594	0.00000000000000
-0.6	-0.91629073187416	-0.91629073187416	-0.00000000000000
-0.5	-0.69314718055995	-0.69314718055995	0.00000000000000
-0.4	-0.51082562376599	-0.51082562376599	-0.00000000000000
-0.3	-0.35667494393873	-0.35667494393873	0.00000000000000
-0.2	-0.22314355131421	-0.22314355131421	0
-0.1	-0.10536051565783	-0.10536051565783	0
0.0	0	0	0
0.1	0.09531017980432	0.09531017980432	0.00000000000000

0.2	0.18232155679395	0.18232155679395	0
0.3	0.26236426446749	0.26236426446749	-0.00000000000000
0.4	0.33647223662121	0.33647223662121	0.00000000000000
0.5	0.40546510810816	0.40546510810816	-0.00000000000000
0.6	0.47000362924574	0.47000362924574	0.00000000000000
0.7	0.53062825106217	0.53062825106217	-0.00000000000000
0.8	0.58778666490212	0.58778666490212	-0.00000000000000
0.9	0.64185388617239	0.64185388617239	-0.00000000000000
1	0.69264743055982	0.69314718055995	-0.00049975000012

Det verkar stämma bra för x-värden i olika delar av intervallet, utom just x=1, men felet där är fortfarande litet.

Uppgift 33

Problem

Uttryck **a)** $\log x \; i \; \ln x$ samt uttryck **b)** $\log_2 x \, i \, \ln x$.

Lösning

Mellan olika logaritmer byter man bas genom: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

a)
<kod>
x = [0:1:10];
y = log(x)
z = log10(x)
</kod>

X:	Log10(x):	Ln(x)
0	-Inf	-Inf
1	0	0
2	0.30102999566398	0.69314718055995
3	0.47712125471966	1.09861228866811
4	0.60205999132796	1.38629436111989
5	0.69897000433602	1.60943791243410
6	0.77815125038364	1.79175946922806
7	0.84509804001426	1.94591014905531
8	0.90308998699194	2.07944154167984
9	0.95424250943932	2.19722457733622
10	1.00000000000000	2.30258509299405

Vi kan härleda ur tabellen att

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}, eftersom\ att\ \log_{10} 10 = 1$$

Detta stämmer om vi kontrollerar med formeln i början.

b)

```
<kod>
x = [0:1:10];
y = log(x)
z = log2(x)
</kod>
```

X:	Log2(x):	Ln(x)
0	-Inf	-Inf
1	0	0
2	1.00000000000000	0.69314718055995
3	1.58496250072116	1.09861228866811
4	2.00000000000000	1.38629436111989
5	2.32192809488736	1.60943791243410
6	2.58496250072116	1.79175946922806
7	2.80735492205760	1.94591014905531
8	3.00000000000000	2.07944154167984
9	3.16992500144231	2.19722457733622
10	3.32192809488736	2.30258509299405

Vi kan härleda ur tabellen att

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}, eftersom\ att\ \log_2 2 = 1$$