Förel. n:o 9 **ATT finna extremvärden till kontinuerliga funktioner**

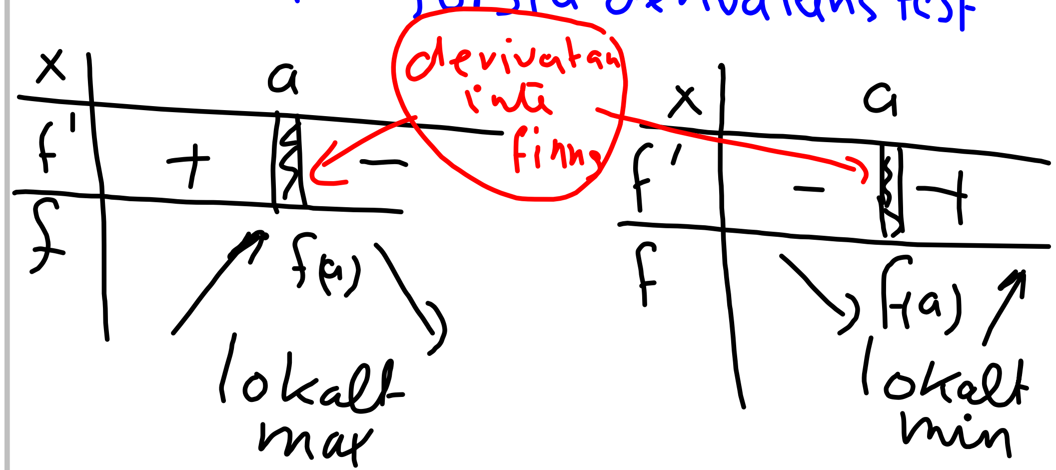
Grundsats Om f är kontinuerlig för $a \le x \le b$ (sluten och begränsad intervall) så har f ett största och ett minsta värde.

Punkter som ger extremvärden

1. stationära punkter dvs där $f'(x)=0$
2. singulära punkter dvs där $f'(x)$ inte finns
3. Ändpunkter som hör till intervallet

För att finna lokala extremvärden

Använd första derivatans test



EXA Bestäm minsta och största värdena till $f(x) = (13-2x)\sqrt{1+4x}$, $0 \le x \le 6$

Lösning ① f kontinuerlig på ett slutet och ändligt intervall, $0 \le x \le 6$

$\Longrightarrow$ f har ett största och ett minsta värde

② kolla stationära punkter: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(13-2x)\sqrt{1+4x} =$$

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dx}(13-2x)\right)}_{=-2}\sqrt{1+4x} + (13-2x)\underbrace{\frac{d}{dx}\sqrt{1+4x}}_{\frac{1}{2\sqrt{1+4x}}\cdot\cancel{4}\,2}$$

$$\left[\frac{d}{dx}\left(u(x)^{\alpha}\right) = \alpha\left(u(x)\right)^{\alpha-1}\cdot u'(x)\right]$$

$$= -2\sqrt{1+4x} + \frac{2(13-2x)}{\sqrt{1+4x}}$$

$$= \frac{-2\left(\sqrt{1+4x}\right)^2 + 2(13-2x)}{\sqrt{1+4x}} =$$

$$= \frac{-2(1+4x) + 2(13-2x)}{\sqrt{1+4x}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+4x}}\left(\underbrace{-1-4x+13-2x}_{\underbrace{12-6x}_{6(2-x)}}\right) =$$

$$= \frac{12}{\sqrt{1+4x}}(2-x) = 0$$

$\therefore f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$

Här $f'(x)$ finns på $0 < x < 6$

Vi har inga singulära punkter

③ Vi har TRE PUNKter

$x = 0,\ 2,\ 6$

ändpunkterna

$f(0)$, $f(2)$, $f(6)$

Vi får $f(0) = 13$, $f(2) = 27$

$f(6) = 5$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{SVAR största värdet} = 27 \\ \quad\text{minsta} \quad -\text{"}- \quad = 5\end{array}}$$

EXB Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till

$$f(x) = 3\arctan(2x) + 4\,\mathrm{arccot}(3x)$$

Lösning $f(x) = 3\arctan(2x) + 4\,\mathrm{arccot}(3x)$ är definierad och deriverbar alla $x \in \mathbb{R}$. Detta medför att endast stationära punkter till f kan vara lokala extrempunkter.

Rep

$$\frac{d}{dx}\arctan(u(x)) = \frac{1}{1+u^2(x)}\,u'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arccot}(u(x)) = \frac{-1}{1+u^2(x)}\,u'(x)$$

Obs! $\boxed{\mathrm{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x}$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(3\arctan(2x)\right)}_{3\cdot\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2} + \underbrace{\frac{d}{dx}\left(4\,\mathrm{arccot}(3x)\right)}_{-4\cdot\frac{1}{1+(3x)^2}\cdot 3}$$

$$= \frac{6}{1+4x^2} - \frac{12}{1+9x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{6}\,1}{1+4x^2} = \frac{\cancel{12}\,2}{1+9x^2} \Rightarrow$$

obs! $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow ad = bc$

$$1+9x^2 = (1+4x^2)2$$

$$\Leftrightarrow 1+9x^2 = 2+8x^2 \Leftrightarrow \underbrace{1-2+9x^2-8x^2}_{x^2-1} = 0$$

$$\therefore f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

en liten tabell

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1)$ lokalt max	$\searrow$	$f(1)$ lokalt min	$\nearrow$

Andra derivatan TEST

Om f'' finns i $x=a$ där $f'(a)=0$

Då gäller att om $f''(a)\neq 0$

1. $f''(a)>0 \Rightarrow f$ har ett lokalt minimum
2. $f''(a)<0 \Rightarrow f$ har ett lokalt maximum

EX klassificera de stationära punkter till $f(x)=x2^{-x}$

Lösning $f(x)=x2^{-x}=\left[2^{-x}=e^{-x\ln 2}\right]$
$=xe^{-x\ln 2}$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(xe^{-x\ln 2}\right)=\left[\frac{d}{dx}e^{u(x)}=e^{u(x)}u'(x)\right]$$

$$=\underbrace{\frac{d}{dx}(x)}_{=1}\left(e^{-x\ln 2}\right)+x\underbrace{\frac{d}{dx}\left(e^{-x\ln 2}\right)}_{e^{-x\ln 2}\underbrace{\frac{d}{dx}(-x\ln 2)}_{-\ln 2}}$$

$$=e^{-x\ln 2}-x\ln 2\, e^{-x\ln 2}=$$

$$=\underbrace{e^{-x\ln 2}}_{\neq 0}\left(1-x\ln 2\right)$$

$$\therefore f'(x)=0 \Rightarrow e^{-x\ln 2}(1-x\ln 2)=0$$

$$\Rightarrow 1-x\ln 2=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{\ln 2}}$$

Endo stationär punkt är $x_0=\frac{1}{\ln 2}$

Alt 1 första derivatan TEST

x		$1/\ln 2$	
$f'(x)$	$+$	$\cdot$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(1/\ln 2)$ lokalt max	$\searrow$

Alt 2

Andra derivatan TEST

Kolla tecken hos $f''\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)=\frac{d}{dx}\left(e^{-x\ln 2}(1-x\ln 2)\right)$$

$$=(1-x\ln 2)\frac{d}{dx}\left(e^{-x\ln 2}\right)+$$

$$+e^{-x\ln 2}\frac{d}{dx}(1-x\ln 2)$$

$$= (1-x\ln 2)\underbrace{\frac{d}{dt}\left(e^{-x\ln 2}\right)}_{e^{-x\ln 2}\underbrace{\frac{d}{dt}(-x\ln 2)}_{-\ln 2}} + e^{-x\ln 2}\underbrace{\frac{d}{dt}(1-x\ln 2)}_{-\ln 2}$$

$$= (1-x\ln 2)\left(e^{-x\ln 2}\right)(-\ln 2) + e^{-x\ln 2}(-\ln 2)$$

$$= e^{-x\ln 2}(-\ln 2)\left(1 - x\ln 2 + 1\right)$$

$$= -\ln 2\, e^{-x\ln 2}(2 - x\ln 2)$$

$$\therefore f''(x) = -\ln 2\, e^{-x\ln 2}(2 - x\ln 2)$$

$$f''(x_0) = f''\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = -\ln 2\, e^{-\frac{1}{\cancel{\ln 2}}\cdot\cancel{\ln 2}}\left(2 - \frac{1}{\cancel{\ln 2}}\cancel{\ln 2}\right)$$

$$= -\ln 2\, e^{-1}(2-1)$$

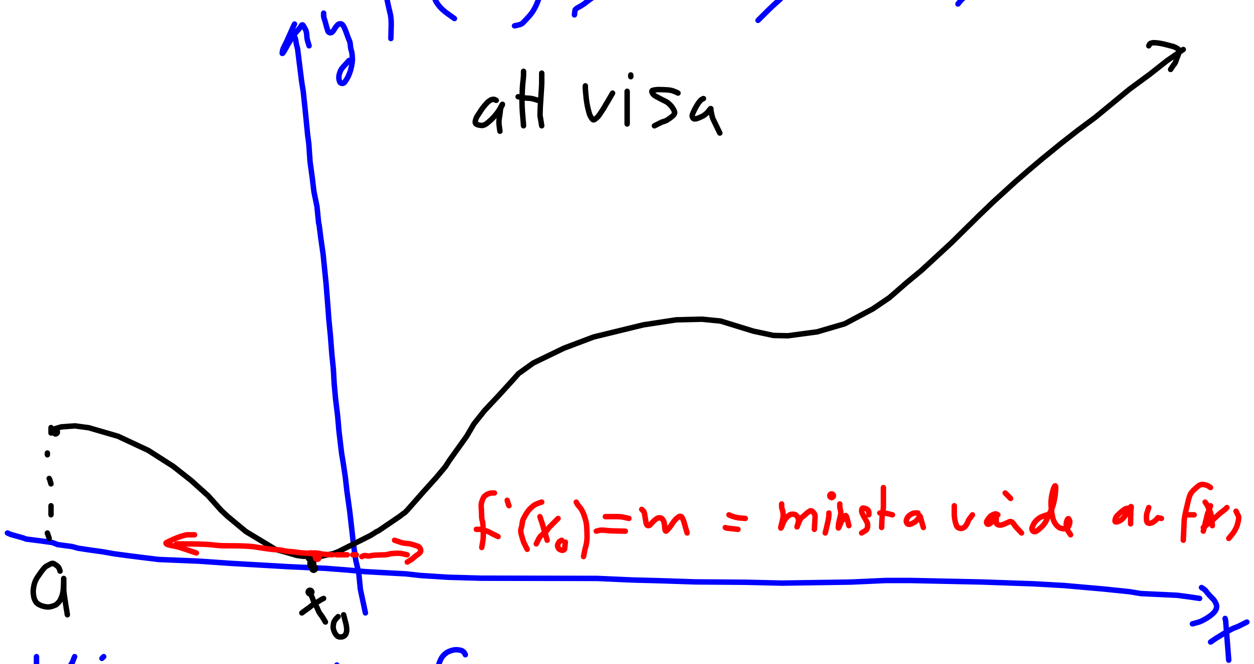
$$= -\ln 2\, e^{-1} < 0$$

lokalt max i $x_0 = \frac{1}{\ln 2}$

Hur man löser olikhetsproblem

Låt $f(x)$ vara deriverbar för $x \geq a$

Visa att $f(x) \geq 0, \; x \geq a$



ATT visa att $f(x) \geq 0, \; x \geq a$

$\Leftrightarrow$ ATT finna minstavärdet till f och kolla att detta värde ≥ 0

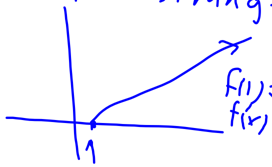
Ex Visa att $\ln\sqrt{x} > \frac{x-1}{x+1}$, alla $x>1$

Lösning Sätt $f(x) = \ln\sqrt{x} - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
och visa istället att
$f(x) \geq 0$, $x>1$

$$f(x) = \underbrace{\ln\sqrt{x}}_{\frac{1}{2}\ln x} - \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\ln x - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Steg 1 Kolla $f(1)=0$ (får inte vara <0)

Steg 2 Använd $f'(x)>0$
$\Rightarrow$ f är strängt växande



$\left.\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f'(x)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)>0,\ x>1$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln x\right)}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}} - \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}_{\frac{2}{(x+1)^2}}$$

$$= \frac{1}{2x} - \frac{2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 2\cdot 2x}{2x(x+1)^2} = \frac{\overbrace{x^2-2x+1}^{(x-1)^2}}{2x(x+1)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{(x-1)^2}{2x(x+1)^2} > 0,\ x>1$$

Slutsats

$\left\{\begin{array}{l} f \text{ kont alla } x\geq 1 \\ f(1)=0 \\ f'(x)>0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow f(x)>0,\ x>1$