Förel. nr 8. Medelvärdessats med Tillämpningar.

Medelvärdessats (viktigaste inom differential kalkyl)

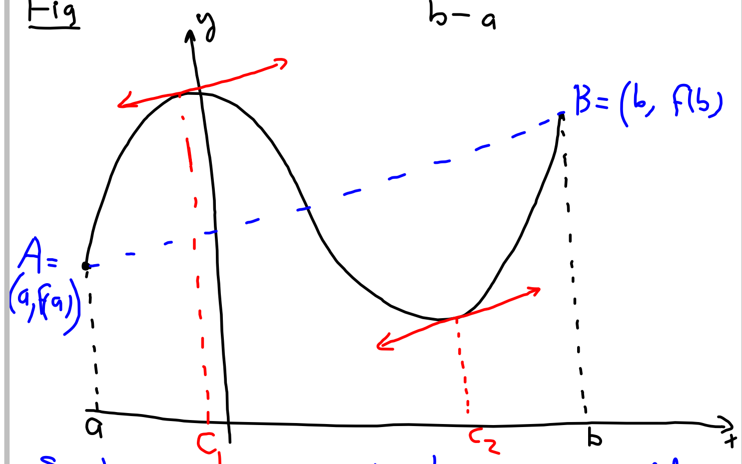
Förutsättning (1) f kontinuerlig $\underbrace{a \le x \le b}_{\text{sluten och beg.}}$ kompakt

(2) f' finns $\underbrace{a < x < b}_{\text{öppen Interv.}}$

Påstående Det finns ett tal c : $a < c < b$:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Fig



Satsen säger att Lutningen till korda AB som är $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ =

$f'(c)$ = Lutningen till tangenlin i $x=c$ (Här har c_1 och c_2)

Satsen handlar om uppskattning av differens mellan två funktionsvärden

$$\boxed{f(b)-f(a) = (b-a)\, f'(c),\quad a<c<b}$$

Tillämpning 1

om $f(a) = f(b)$

$$\underbrace{f(b) - f(a)}_{=0} = \underbrace{(b-a)}_{\neq 0} f'(c), \quad a < c < b$$

$$\Rightarrow f'(c) = 0$$

dvs

om $f(a) = f(b)$ så har $f'(x) = 0$ minst en rot i intervallet $a < x < b$

(Rolles sats)

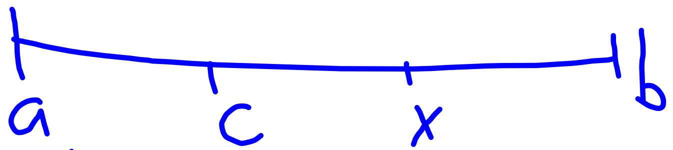
Tillämpning 2

om $f'(x) = 0$, $a < x < b$

$$\Rightarrow f(x) = \text{konstant} \quad a \leq x \leq b$$

motivering

x godt.

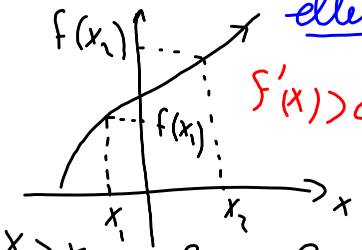


$$f(x) - f(a) = \underbrace{(x-a)}_{\neq 0} \underbrace{f'(c)}_{=0}, \quad a < c < x$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) = \text{konstant} \quad a \leq x \leq b$$

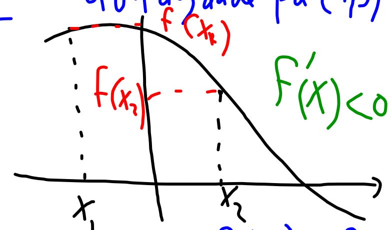
Om monotona funktioner

Funktionen f säges vara monoton i intervallet $(a, b) = a < x < b$ om f är antigen växande på (a,b) ellerr avtagande på (a,b)



$f'(x) > 0$

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
Strängt växande



$f'(x) < 0$

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
Strängt avtagande

Medelvärdessatsen ger

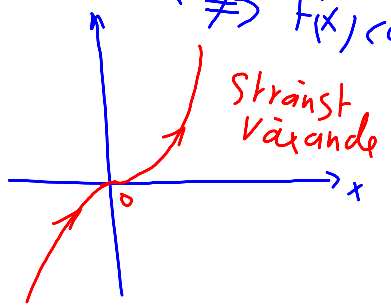
I. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ är växande på (a,b)
$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ är avtagande på (a,b)

II $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ är strängt växande (f har en invers)
$f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ är strängt avtagande (f har invers)

Obs! f strängt växande (avtagande) $\not\Rightarrow f'(x) > 0$ $\not\Rightarrow f'(x) < 0$

Ty $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$



Bra ex För vilka x är

$f(x) = 2x - \ln(1+3x^2)$ strängt växande (har en invers)

Lösning Vet att om $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ f strängt växande (har en invers)

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left(2x - \ln(1+3x^2)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dx}(2x)}_{=2} - \underbrace{\frac{d}{dx} \ln(1+3x^2)}$$

Använd $\frac{d}{dx} \ln(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$$= 2 - \frac{6x}{1+3x^2} = \frac{2(1+3x^2) - 6x}{1+3x^2} =$$

$$= \frac{2+6x^2-6x}{1+3x^2} = \frac{6\left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right)}{1+3x^2}$$

$$= \left[x^2 - x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{3}}_{= 1/12} \right]$$

$$= \frac{6\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right)}{1+3x^2} > 0$$

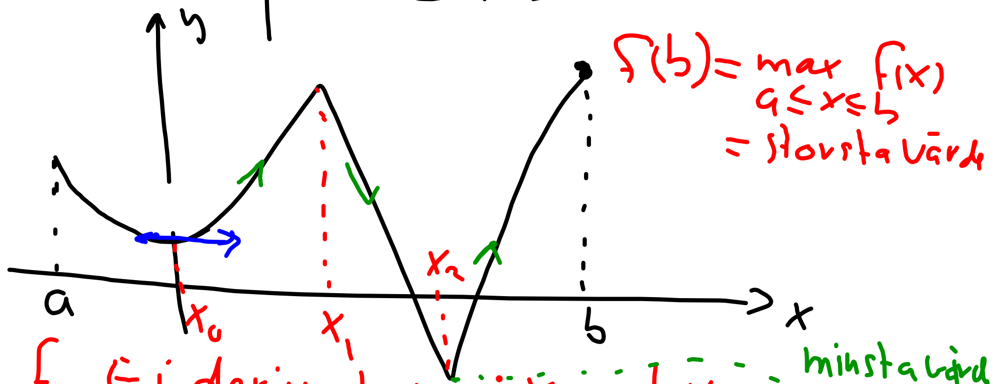
Svar f är strängt växande $\forall x \in \mathbb{R}$

Egenskaper hos kontinuerliga fkner

Existensen av Extremvärden

Om f kontinuerlig på ett kompakt intervall dvs $a \le x \le b = [a,b]$

Så har f ett största och ett minsta värde på $[a,b]$



f Ej deriverbar i x_1 och x_2

dessa kallas för singulära pkter

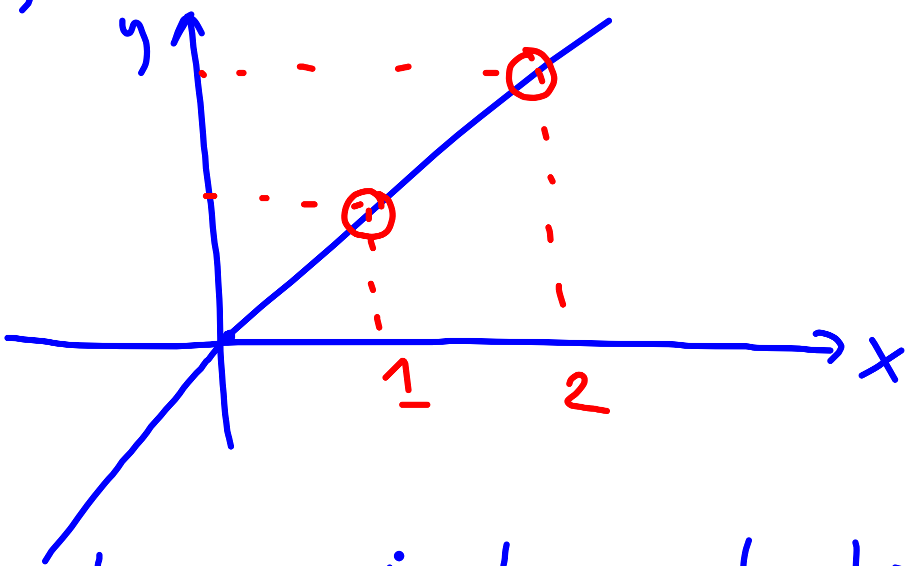
f är deriverbar överallt annars

$f'(x_0) = 0$, x_0 kallas stationär punkt

Viktigt att (1) f kont på $a \le x \le b$

(2) $[a,b]$ sluten och begränsad

Ex $f(x) = x \quad 1 < x < 2$

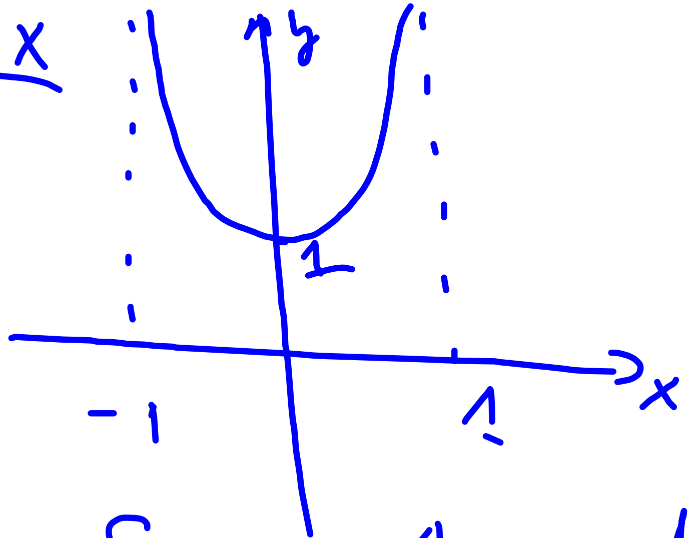


saknar minsta och största värde

Ty intervallet är öppen

(1 och 2 $\notin$ Intervallet)

Ex



minsta värde = 1

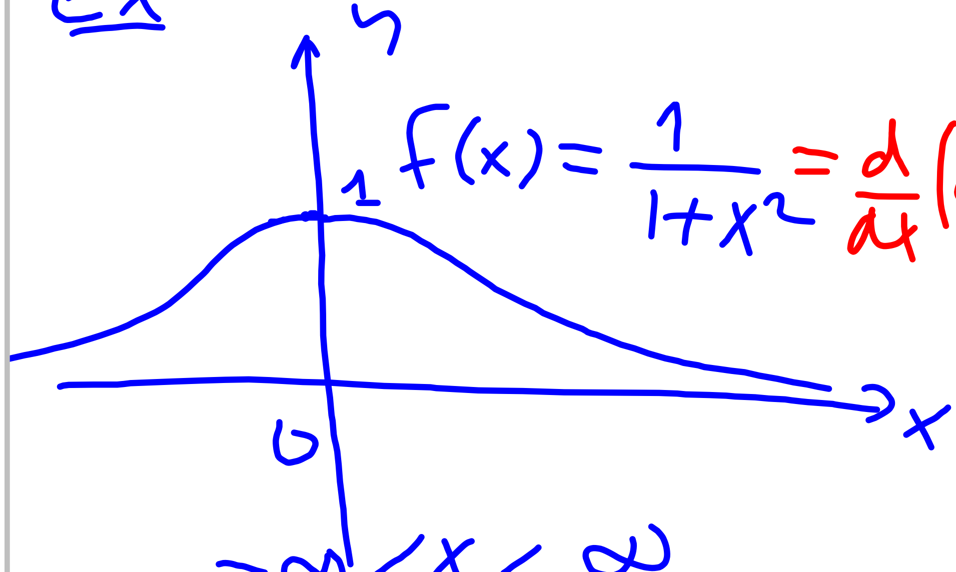
men största saknas

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d}{dx}(\arcsin x)$$

$$-1 < x < 1$$

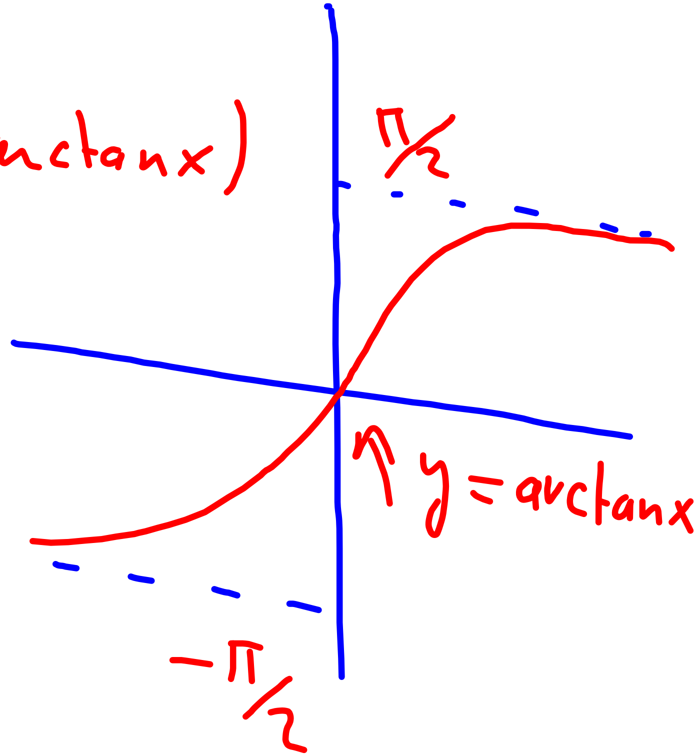
Ex

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}(\arctan x)$$



$-\infty < x < \infty$

Största värde $= 1$
minst saknas

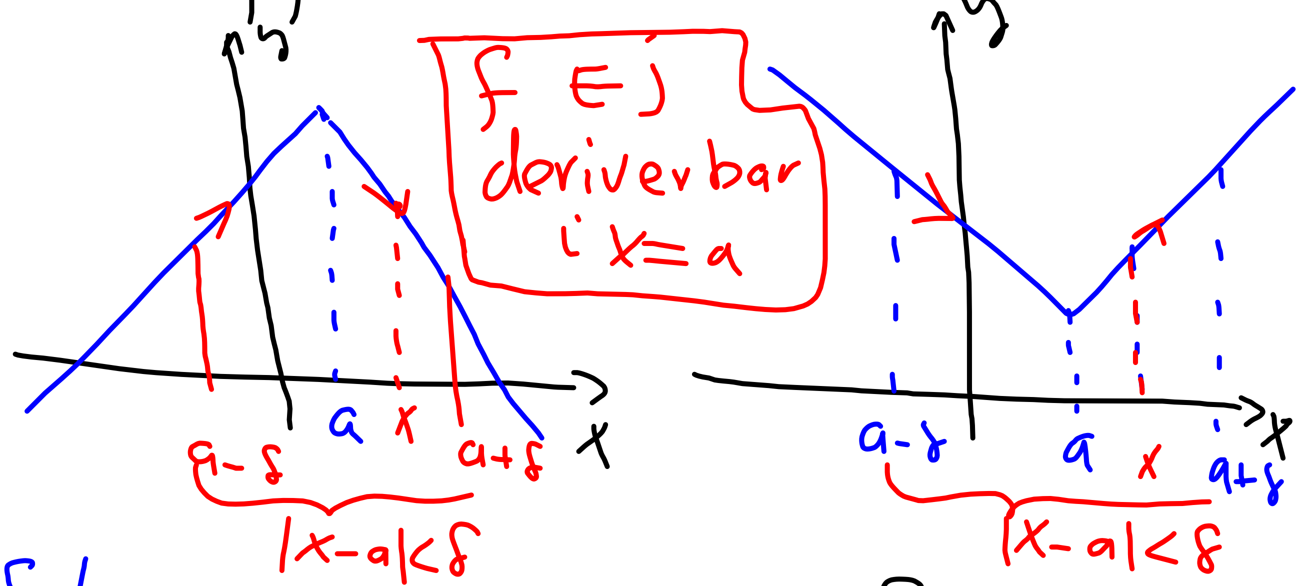


$-\infty < x < \infty$

f saknar minsta och största värde

Hur man använder derivatan

<u>Problem</u>. Bestäm funktions "Toppar och dalar"



f har ett <u>lokalt maximum</u> i $x=a$ dvs

$f(x) \le f(a) \quad |x-a|<\delta$

f har ett <u>lokalt minimum</u> i $x=a$ dvs

$f(x) \ge f(a)$

$|x-a|<\delta$

Resultat om lokala extremvärden

ETT lokalt extremvärde (maximum/minimum) kan antas i någon av följande punkter

1. Stationära punkter dvs de pkter där $f'(x) = 0$
2. Singulära punkter dvs de punkter där $f'(x)$ inte finns
3. ändpunkter som hör till intervallet

Hur skall vi göra?

A. Först derivatans TEST

studera Teckenändringen hos $f'(x)$

f' inte finns

x		a	
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

lokalt maximum i $x=a$

f' inte finns

x		a	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

lokalt minimum i $x=a$