Förel. nr 7 Derivatan av inversa funktioner

- Derivatan av sammansatta fkner (KEDJEREGELN)
- Implicit derivering
- Differentialer.

1. Derivatan av inversa funktioner

Låt ① f och dess invers f^{-1} kontinuerliga

② $f'(x)$ finns $f'(x) \neq 0$

Då gäller $$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$y_0 = f(x_0)$$

behöver ej vara lika

Motivering

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$
$$y_0 = f(x_0) \iff x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Vi vill ha $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

$y \neq y_0$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

f^{-1} deriverbar i $y_0 \implies f^{-1}$ kont i y_0

dvs $\underbrace{f^{-1}(y)}_{x} \longrightarrow \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0}$, då $y \to y_0$

$x \longrightarrow x_0$, då $y \to y_0$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Olika sätt att använda derivatan av inversa funktioner

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}, \quad y = f(x)$$

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(f^{-1}(y)\right) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)}}}$$

A. $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<1$

Motevering

$y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} = \frac{d}{dx}(\arcsin x) = \boxed{\frac{1}{\frac{dx}{dy}}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\sin y)}$$

definition

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1<x<1$$

B. $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x\in\mathbb{R}$

Motivering

$y = \arctan x \iff x = \tan y \quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\tan y} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

C. $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<1$

D. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$

<u>EX A</u>. $f(x) = x^3 + 2x$

Visa att f har en invers, f^{-1}
och bestäm $(f^{-1})'(0)$

<u>Lösning</u>

f^{-1} finns om f är injektiv
dvs $x_1, x_2 \in D(f)$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Men vet att om $f'(x) > 0$ (< 0)
$\Rightarrow f$ är strängt växande (strängt avtagande)
$\Rightarrow f$ är injektiv $\Rightarrow f$ har en invers

Här $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) finn $(f^{-1})'(0)$

Vet att $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

då $y_0 = f(x_0)$

Vi söker x_0: $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

då $0 = f(x_0) = x_0^3 + 2x_0$

$\Leftrightarrow x_0^3 + 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0(x^2+2) = 0$

$\Rightarrow x_0 = 0$ #

$f^{-1'}(0) = \dfrac{1}{f'(0)}$, $f'(x) = 3x^2 + 2$

<u>Svar</u> $(f^{-1})'(0) = 1/2$

2. Derivatan till en sammansatta fkn: Kedje Regeln

Låt (1) f vara deriverbar i $u = g(x)$

(2) g —————— " —————— i x

$$y(x) = f[g(x)]$$

$$y'(x) = f'[g(x)] \; g'(x)$$

inre derivatan

Glöm inte mig

$$y(x) = f[u(x)]$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}}$$

EXA $y(x) = \arctan\sqrt{x}\ ,\ x \geq 0$

Sätt $u = \sqrt{x}$

$y(x) = \arctan(u(x))$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{d(\arctan u)}{du}}_{\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}} \frac{du}{dx} =$$

$$= \frac{1}{1+x} \underbrace{\frac{d(\sqrt{x})}{dx}}_{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \left(\frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Svar $\frac{d}{dx}(\arctan\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

EX B Hur man använder logaritmisk derivering

$$\circledast \quad \boxed{\frac{d}{dx}\ln(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{då } u(x)>0}$$

Motivering

$$\frac{d}{dx}\ln(u(x)) = \underbrace{\frac{d}{du}\ln u}_{\frac{1}{u}} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{u'(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Bra EX

$f(x) = x^x$, $x>0$, finn $f'(x)$

Vanligt fel

$$\frac{d}{dx}(x^x) = x\,x^{x-1}$$

$\uparrow$ Fel.

Metod 1

$$\ln f(x) = \ln(x^x) = x\ln x \quad (1)$$

Tag Derivatan av VL(1) = HL(1)

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\ln(f(x))}_{\frac{f'(x)}{f(x)}} = \frac{d}{dx}(x\ln x) = \underbrace{1\cdot\ln x + \cancel{x}\,\frac{1}{\cancel{x}}}_{\ln x + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 + \ln x \Rightarrow$$

$$f'(x) = \underbrace{f(x)}_{x^x}(1+\ln x)$$

$$= x^x(\ln x + 1)$$

metoda Använd $\boxed{u^v = e^{v \ln u}, u>0}$ (**)

Motivering: tag log av VL(**) = HL(**)

$$\underbrace{\ln(u^v)}_{v \ln u} = \underbrace{\ln(e^{v \ln u})}_{v \ln u} \quad \text{ok!}$$

$$\frac{d}{dx}(x^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{x \ln x}\right) = \left[u = x \ln x\right.$$

$$= \frac{d}{dx}\left(e^{u(x)}\right) = \frac{d}{du}e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= e^u u'(x) = \underbrace{e^{x \ln x}}_{x^x} \underbrace{\frac{d}{dx}(x \ln x)}_{1+\ln x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1+\ln x)$$

Räknelagar för derivatan

1. $\left(A\, f(x) + B\, g(x)\right)' = A\, f'(x) + B\, g'(x)$

A, B konstanter

2. $\frac{d}{dx}\left(u(x) \cdot v(x)\right) = \frac{du}{dx} \cdot v(x) + u(x) \frac{dv}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{\frac{du}{dx} \cdot v(x) - u(x) \frac{dv}{dx}}{\left(v(x)\right)^2}$

4. $\frac{d}{dx} f\left[u(x)\right] = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$ = inre derivatan

5. Inversa funktionen

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(x)\right] = \frac{1}{\frac{d}{dy}\left(f(y)\right)} \qquad y = f^{-1}(x) \\ \Updownarrow \\ \frac{d}{dy}\left(f^{-1}(y)\right) = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)}, \quad y = f(x)\end{gathered}}$$

Derivator för elementära funktioner

$f(x)$	$f'(x)$	$f[u(x)]$	$(f[u(x)])' = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$
x^α α: tal	$\alpha x^{\alpha-1}$ där x, def	$(u(x))^\alpha$	$\alpha (u(x))^{\alpha-1}\ u'(x)$
e^x	e^x	$e^{u(x)}$	$e^{u(x)}\ u'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$ logaritmisk derivering
$\sin x$	$\cos x$	$\sin[u(x)]$	$\cos[u(x)]\ u'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos[u(x)]$	$-\sin[u(x)]\ u'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-1<x<1$	$\arcsin[u(x)]$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}}\ u'(x)$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(u(x))$	$\frac{1}{1+u^2(x)}\ u'(x)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-1<x<1$	$\arccos(u(x))$	$\frac{-1}{\sqrt{1-u^2(x)}}\ u'(x)$
$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arccot}(u(x))$	$-\frac{1}{1+u^2(x)}\ u'(x)$

C. Implicit derivering

(Tillämpning av kedjeregeln)

Om ur sambandet $g(x,y)=0$ kan vi lösa ut $y = f(x)$ så säges att $y=f(x)$ är explicit definierad annars implicit definierad

Ex $g(x,y) = e^x - y = 0$

$\Rightarrow y = e^x$ explicit definierad.

medan $g(x,y) = xy + y^2 - 2x = 0$

Här $y=f(x)$ är implicit definierad

Finn $y'(x)$ där $xy+y^2-2x=0$

Lösning sätt $y=y(x)$ i sambandet

$$x\,y(x) + (y(x))^2 - 2x = 0$$

och sedan derivera map x

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left[x\,y(x) + (y(x))^2 - 2x\right]}_{\frac{d}{dx}(x\,y(x)) + \frac{d}{dx}(y(x))^2 - \frac{d}{dx}(2x)=0} = \frac{d}{dx}[0] = 0$$

$$1\cdot y(x) + x\,y'(x) + 2y(x)\,y'(x) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow y'(x)\,(x+2y(x)) = 2 - y(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{y'(x) = \frac{2-y(x)}{x+2y(x)}}$$

Title: jan 30-13:54 (12 of 12)