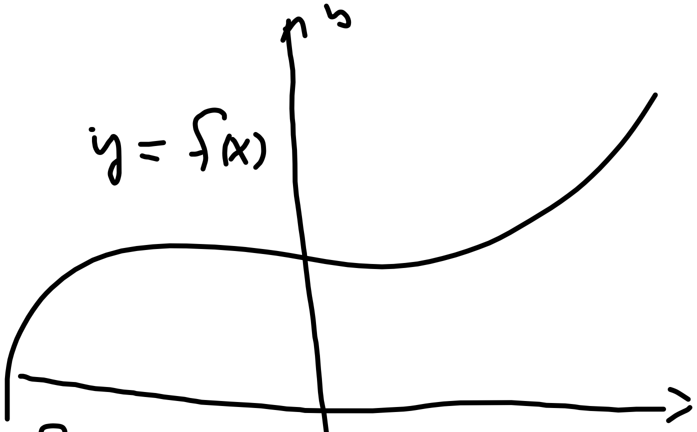
Förel.nr5 Tillämpning av Gränsvärden

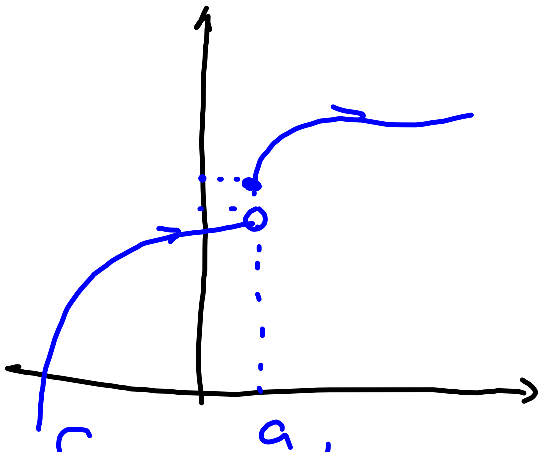
1. Kontinuitet, 2. asymptoter, 3. Standard gränsvärden

Enbart Förel: nr1 — nr5 ingår i slas1 och i KS1

1. Kontinuitet



f är kontinuerlig för alla $x \in D(f)$



f Ej kontinuerlig i $x=a$

f sägs vara kontinuerlig i $x=a$

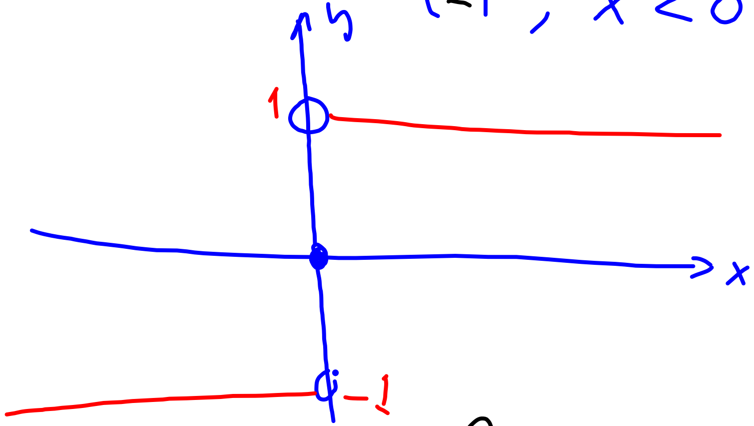
$$\iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad [f \text{ är definierad i } x=a]$$

ATT FÖRSTÅ: Skillnaden mellan
f definierad i $x=a$ och
f kontinuerlig i $x=a$

f kontinuerlig i $x=a \Longrightarrow f$ "måste" vara definierad i $x=a$
(omvänt gäller Ej)

Bra EX

$$\operatorname{sgn}(x)=f(x)=\begin{cases} +1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$



f är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$
för varje $x \in \mathbb{R}$ finns $f(x)=$ TAL
men f Ej kontinuerlig i $x=0$, ty

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=1 \neq \lim_{x\to 0-} f(x)=-1$$

<u>EX1</u> $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$

<u>Lösning</u> 1. f är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$, dvs för $a \in \mathbb{R}$ finns alltid ett motsvarande tal $y = f(a)$

2. Är f kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$?

f är kontinuerlig för alla $x \neq 2$ men är f kontinuerlig i $x = 2$

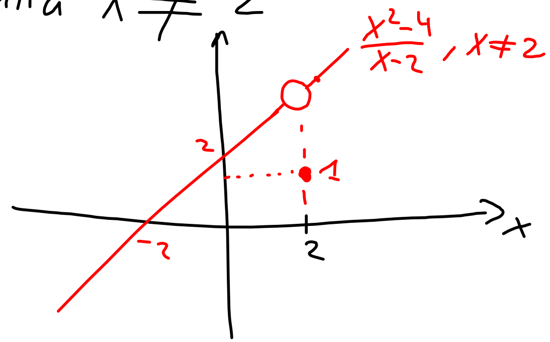
dvs är $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 1$?

a) Förenkla $\frac{x^2-4}{x-2}$, $x \neq 2$

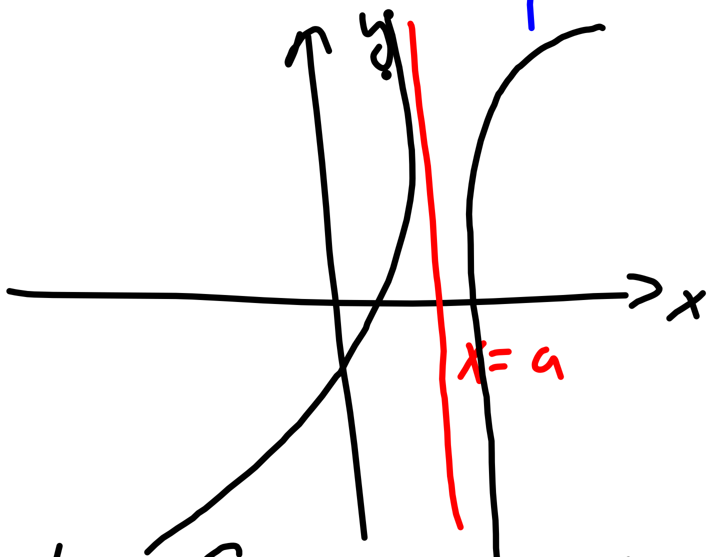
$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = x+2$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4 \neq 1$$

<u>SVAR</u> f är kontinuerlig för alla $x \neq 2$



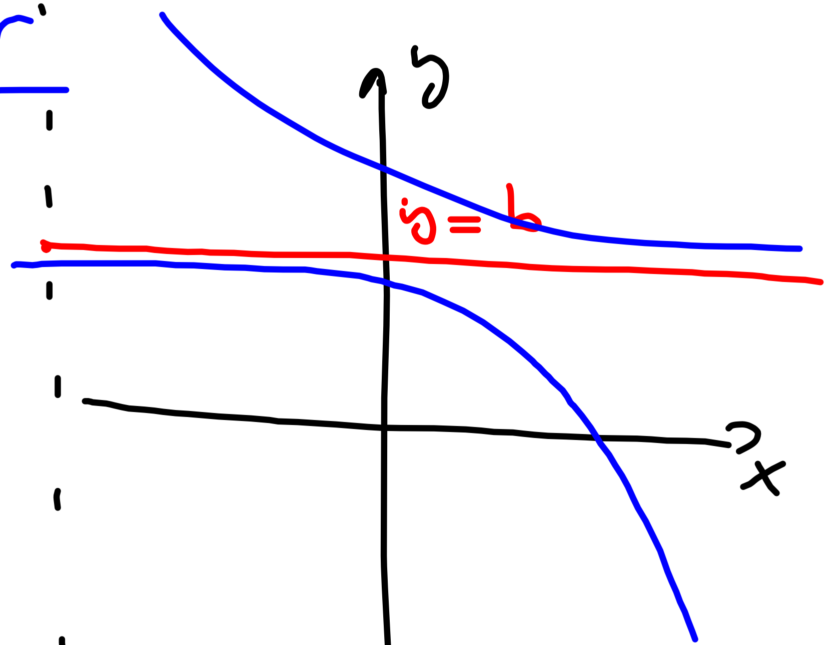
2. Asymptoter



$$\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty \quad \text{eller}$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = +\infty$$

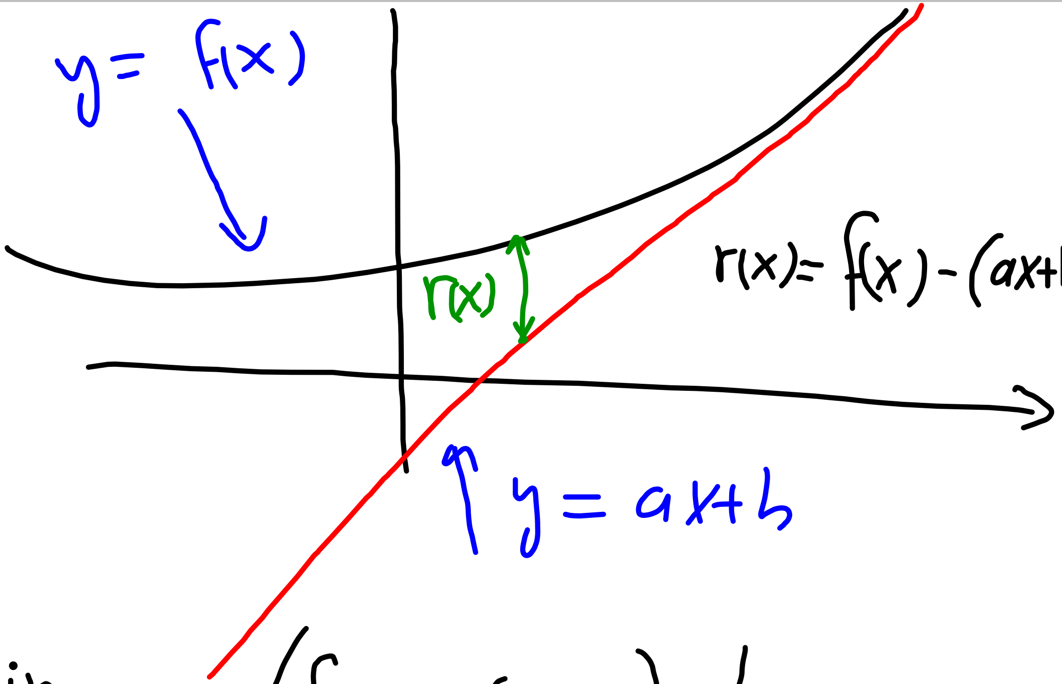
så sägs att linjen $x=a$ är en <u>lodrät asymptot</u>



om $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

eller $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

så sägs att linjen $y=b$ är en <u>vågrät asymptot</u>



$r(x) = f(x) - (ax+b)$

om $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(f(x)-(ax+b)\right) = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} r(x) = 0$

Så säges att räta linjen $y = ax+b$ är <u>sned asymptot</u>

dvs "nära" ∞ kan vi approximera $y = f(x)$ med $y = ax+b$

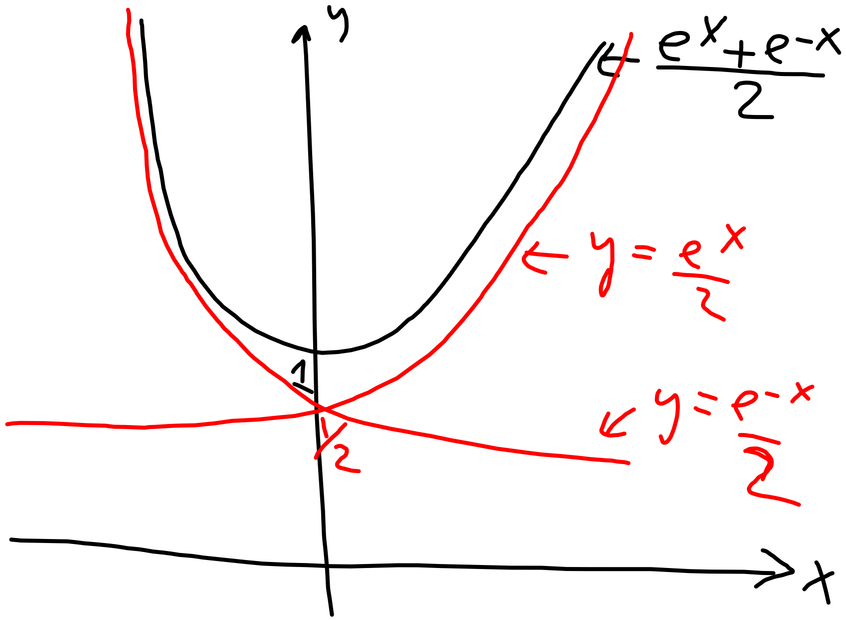
Det finns andra kurvor som är asymptoter

Ex $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

$$\left(f(x) - \frac{e^x}{2}\right) = \frac{e^{-x}}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(f(x) - \frac{e^x}{2}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(f(x) - \frac{e^{-x}}{2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x}}{2} = 0$$



Metod att finna sned asymptot $y = ax+b$

steg 1 Finn a, via $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

$(x \to -\infty)$

om a finns ändligt så gå till steg 2 (annars sned asymptot saknas)

steg 2 Finn b, via $\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$

$(x \to -\infty)$

om b finns ändligt så har vi snedasymptot $y = ax+b$

Men om $b = \pm\infty$ så

Saknas sned asymptot

Ex Sök ev. asymptoter till
$f(x)=\sqrt{1+x^2}$

Lösning ① Vi observerar att $f(-x)=f(x)$
$f(x)$ är jämn fkn kring y-axeln
$f(x)>0$

Räcker att finna asymptoter för $x>0$
dvs vi söker endast då $x\to\infty$

② Sätt $y=ax+b$

(i) $$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$=\left[\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}=\sqrt{1}=1$$

DELSVAR $a=1$

(ii) $$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$

$$=[\text{konj. regel}]=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\left[\sqrt{1+x^2}=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\text{ fe (i)}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

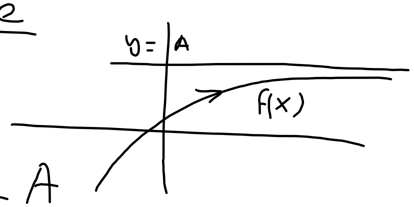
$$=\frac{1}{\infty}=0$$

DEL SVAR: $b=0$

SVAR $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ har snedasymptot $y=x$

TALet e

Def



$f(x) < A$

Här funktionen f är växande och uppåt begränsad med asymptoten $y = A$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Man kan visa (se boken) att $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$

Def $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$$

EX $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2}$$

$= [2n = m]$ Då fås

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{m \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{1/2}$$

$$= \left[\underbrace{\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}_{=e}\right]^{1/2} = \sqrt{e}$$

Svar $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$$

Olika sätt att använda

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Vi har

(1) $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$\Updownarrow$

(2) $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left[\frac{1}{x}=t,\ t\to 0 \Leftrightarrow x\to\infty\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$$

Standard gränsvärden

Obs! $a>0$, $\left[\frac{\pm a}{0}\right] = \pm\infty$, $\left[\frac{\pm a}{\infty}\right] = 0$

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(2) Jämförelse exponential – potens

$a>1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty \iff \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$

$\alpha =$ konstant

(3) Jämförelse log – potens

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \iff \lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = 0$

$\alpha =$ konstant

(4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\Updownarrow$

$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$