Forel nr 24. lite repetition

Jämförelse för positiva serier

Om $0 \le a_k \le b_k$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$

Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$

Ex 1 Undersök $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k}$

$$\underbrace{\frac{1}{2^k k}}_{a_k} \leq \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{b_k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

VET $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad |r|<1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}} - 1 = 2-1 = 1$$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k}$ är konvergent

Ex 2 Undersök om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\, e^k}$ är konv.

Alt 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\, e^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{e}\right)^k}_{r<1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)} - 1$$

$$= \frac{e}{e-1} - 1$$

$$= \frac{e-e+1}{e-1}$$

$$= \frac{1}{e-1} > 0$$

Altern 2 Använd Integral TEST

$\frac{1}{\sqrt{k}\, e^k} \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\, e^x} \quad x \ge 1$

avtagande.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\, e^k} \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\, e^x}\, dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\, e^x}\, dx \le \int_1^{\infty} \frac{1}{e^x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^b = 1 - \underbrace{\lim_{b\to\infty} e^{-b}}_{=0} = 1$$

$\therefore \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\, e^x}\, dx$ är konvergent $\Longrightarrow$

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\, e^k}$ är konvergent

Title: feb 28-09:24 (3 of 11)

Allmänna derivationsregler

produktregel

$$\frac{d}{dt}\left[f(x)\,g(x)\right] = g(x)\frac{d}{dt}f(x) + f(x)\frac{d}{dt}g(x)$$

Kvotregel

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Kedjeregel

$$\frac{d}{dt}f\left[u(x)\right] = f'\left[u(x)\right]\,u'(x)$$

Invers regel

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

där $y = f(x)$

Visa att

$$f(x) = \arcsin(x^2-1) + 2\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),\quad 0 \le x \le \sqrt{2}$$

är konstant och bestäm denna.

Lösning $f(x) = \text{konstant}$ på $0 \le x \le \sqrt{2}$

$\Leftarrow f'(x) = 0$ på $0 < x < \sqrt{2}$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}\arcsin(x^2-1)}_{\frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{(x^2-1)^2}_{x^4-2x^2+1}}}\underbrace{\frac{d}{dx}(x^2-1)}_{2x}} + 2\underbrace{\frac{d}{dx}\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}_{\frac{-1}{\sqrt{1-\underbrace{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}_{\frac{x^2}{2}}}}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}_{\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}}}$$

$$\underbrace{\cancel{1} - x^4 + 2x^2 - \cancel{1}}_{x^2(2-x^2)} \qquad -\frac{\sqrt{2-x^2}}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2(2-x^2)}}_{\sqrt{x^2}\sqrt{2-x^2}}}\cdot 2x - \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

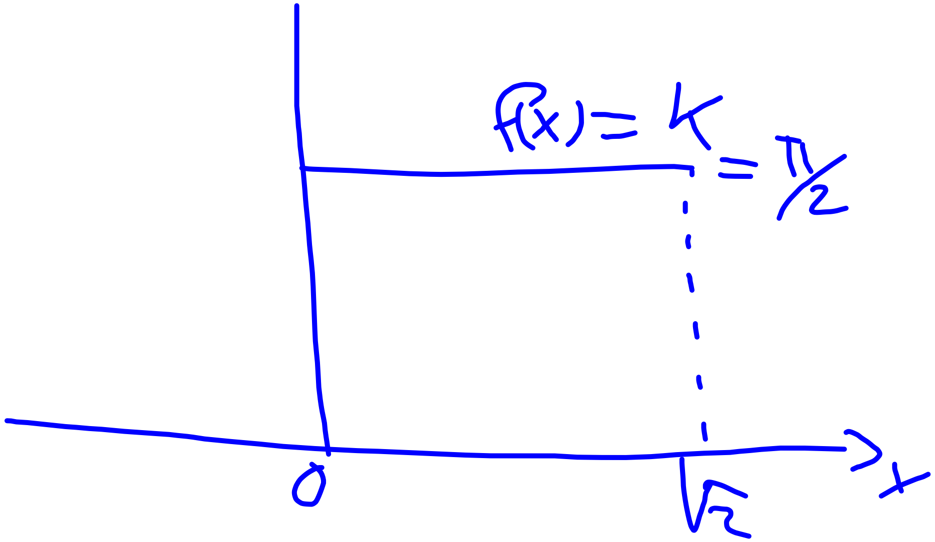
$$,\ \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{2-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} = 0$$

Title: feb 28-09:36 (5 of 11)

derivatan $f'(x) = 0 \quad 0 < x < \sqrt{2}$

$\Longleftrightarrow f(x) = \text{konstant} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}$



$$f(0) = \underbrace{\arcsin(0-1)}_{\underbrace{\arcsin(-1)}_{-\pi/2}} + 2\underbrace{\arccos\left(\frac{0}{\sqrt{2}}\right)}_{\underbrace{\arccos(0)}_{\pi/2}}$$

$$= -\pi/2 + 2 \cdot \pi/2 = \pi/2$$

Ex Bestäm värdemängden till funktionen

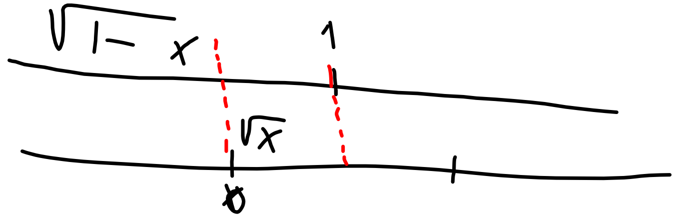
$$f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$$

Lösning Vi behöver ha $D(f)$ dvs för vilka x är $f(x)$ definierad!

$\sqrt{u(x)}$ definierad då $u(x) \geq 0$

$\sqrt{1-x}$ def då $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

$\sqrt{x}$ def då $x \geq 0$



$f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$ def $0 \leq x \leq 1$

P.g.a att $f(x)$ är kontinuerlig på det kompakta intervallet $\Rightarrow$ f har ett största och ett minsta värde på $0 \leq x \leq 1$

$$V(f) = \{ y : m \leq y \leq M \}$$

minsta värde

största värde

m och M antas antigen i ändpunkterna $x=0$ och $x=1$ eller i en inre punkt av intervallet $[0,1]$ som ges då $f'(x)=0$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{1-x} - \frac{d}{dx}\sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\underbrace{\frac{d}{dx}(1-x)}_{-1} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad 0<x<1$$

$f'(x)<0$, $0<x<1 \Longrightarrow$

$f(x)$ är strängt avtagande

ÄNDPUNKTERNA $x=0$, $x=1$

$$f(0) = \sqrt{1-0} - \sqrt{0} = 1$$

$$f(1) = \sqrt{1-1} - \sqrt{1} = -1$$

SVAR $V(f) = \{y : -1 \le y \le 1\} =$

$= \{-1 \le f(x) \le 1\}$

En behållare full med vätska har formen av den kropp som fås då $D=\{0\le x<\infty,\ y=\sqrt{\frac{1}{(x+1)(x+2)}}\}$ som roterar ett varv runt x-axeln.

I nedersta delen av behållaren finns en kran som släpper ut vätska med 1 V.e/s. Hur mycket tid krävs få att tömma ut hela behållaren

<u>Lösning</u> Vi söker Volymen av behållaren. Denna ges av

$$\pi\int_0^\infty (f(x))^2\,dx=\pi\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

$$\pi \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \pi \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx =$$

$$= \pi \lim_{b\to\infty} I(b)$$

$$I(b) = \int_0^b \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int_0^b \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}\right) dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 = A(x+2)+B(x+1)$$

$$= (A+B)x + 2A+B$$

Identifiering $\Rightarrow$ $\quad A+B=0 \Rightarrow A=-B$

$$2A+B=1$$

$$\therefore \; A=1, \; B=-1 \qquad 2A-A=1 \Rightarrow A=1$$

$$I(b)=\int_0^b \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int_0^b \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \Big[\ln(x+1)-\ln(x+2)\Big]_0^b =$$

$$= \left[\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]_0^b = \ln\left(\frac{b+1}{b+2}\right)-\ln\left(\frac{0+1}{0+2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{b+1}{b+2}\right) - \underbrace{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}_{\ln 1-\ln 2} = \ln\left(\frac{b+1}{b+2}\right)+\ln 2$$

Obs! $\ln\left(\frac{b+1}{b+2}\right)=\ln\left(\frac{b\left(1+\frac{1}{b}\right)}{b\left(1+\frac{2}{b}\right)}\right)=\ln\left(\frac{1+\frac{1}{b}}{1+\frac{2}{b}}\right)$

$$\lim_{b\to\infty} I(b) = \underbrace{\lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{b}}{1+\frac{2}{b}}\right)}_{\ln\left(\frac{1+0}{1+0}\right)=\ln(1)=0} + \ln 2$$

Volymen av behållaren är

$$\pi\int_0^\infty (f(x))^2\,dx = (\pi \ln 2)\ \text{V.e}$$

SVAR Det TAR $(\pi \ln 2)$. s för att tömma ut hela behållaren