FÖRELÄSNING 22 Om Taylorsutveckling

Taylors Sats och dess tillämpningar

Problem: Givet en funktion $f(x)$ definierad i en öppen omgivning till $x = a$.

(i) kan vi approximera funktionen $f(x)$ med ett polynom $P_n(x)$ av grad n i närheten av $x = a$, där $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$.

(ii) Hur bra är approximationen, dvs hur "litet" eller"stort" är felet $r_n(x)$, där $|r_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$.

1. Approximation av grad ett eller linjär approximation

Finn ett polynom av grad ett : $P_1(x) = a_0 + a_1(x-a)$ som kan approximera $f(x)$ så bra som möjligt nära $x = a$. Vi försöker att approximera $f(x)$ med dess tangentlinjen som går genom $(a, f(a))$. Denna ges av $P_1(x = f(a) + (x-a)f'(a)$. Felet $r_1(x)$ ges då av $|r_1(x)| = |f(x) - P_1(x)|$.

Ex1: Låt $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ och $a = 3$.

Hur bra kan tangentlinjen $P_1(x)$ till $f(x)$ approximera $f(x)$ nära $x = 3$.

Lösning:

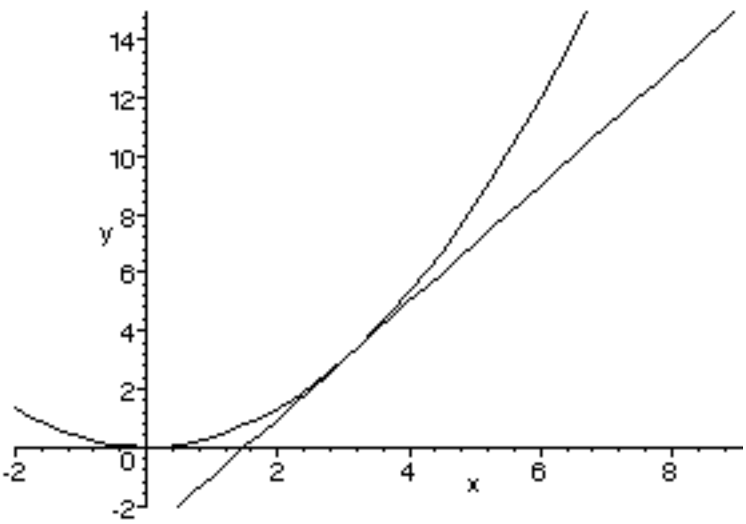
Tangentlinjens ekvation ges av $P_1(x) = f(3) + (x-3)f'(3) = 2x - 3$.

Felet $|r_1(x)| = \left|\frac{1}{3}x^2 - (2x-3)\right| = \left|\frac{(x-3)^2}{3}\right| = \frac{|x-3|^2}{3}$.Storlek hos felet beror på avståndet från $x = 3$

Således om vi väljer $|x-3| \le 10^{-3} \Rightarrow |r_1(x)| \le \frac{1}{3}\left(10^{-3}\right)^2 = \frac{1}{3}10^{-6}$.

En bra approximation

En bild



2. Approximation av grad två eller att approximera en funktion med ett andra grad polynom

Finn ett polynom av grad två : $P_2(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2$ som kan approximera $f(x)$ så bra som möjligt nära $x = a$.

Ett sätt att finna konstanterna a_0, a_1, a_2 är att låta :

$$f(a) = P_2(a), \quad f'(a) = P_2'(a), \quad f''(a) = P_2''(a)$$

Detta ger $a_0 = f(a), \quad a_1 = f'(a), \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(a)$

Det sökta polynomet blir: $P_2(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a).$

Felet blir då i närheten av $x = a$, $|r_2(x)| = |f(x) - P_2(x)|$.

Ex 2. Approximera $f(x) = e^x$, nära $x = 0$. dels med ett polynom av grad ett, dels med ett polynom av grad två och jämför felet.

Lösning

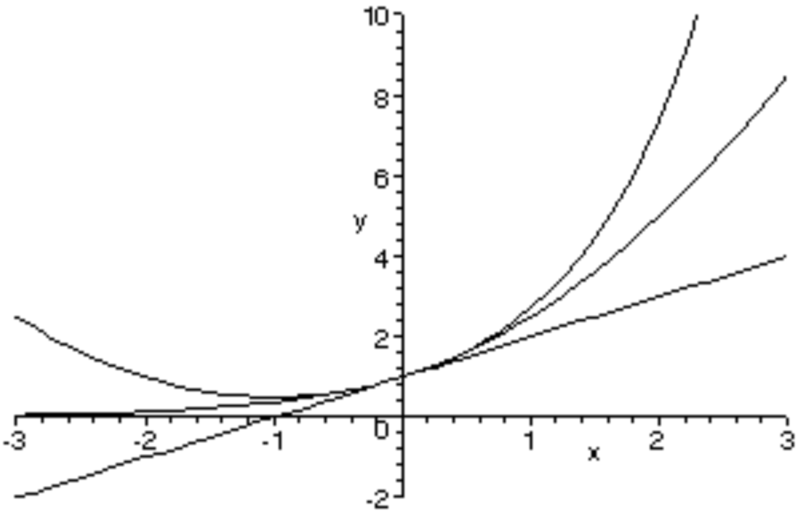
Här fås $P_1(x) = 1 + x$ tangentlinjen i punkten $(0, f(0))$,och $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Vi ställer upp en tabell för små x och för stora x

	små värden av x				stora värden på x		
x	e^x	$P_1(x)$	$P_2(x)$	x	e^x	$P_1(x)$	$P_2(x)$
-0.4	0.6703	0.6000	0.6800	-2.0	0.1353	-1.000	1.0000
-0.3	0.7408	0.7000	0.7450	-1.5	0.2231	-0.5000	0.6250
-0.2	0.8187	0.8000	0.8200	-1.0	0.3679	0.0000	0.5000
-0.1	0.9187	0.9000	0.9050	-0.5	0.6065	0.50000	0.6250
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	0.0	1.0000	1.0000	1.0000
0.2	1.2214	1.2000	1.2200	1.0	2.7183	2.0000	2.5000

Ovan stående tabell ger att skall vi ha ett bra approximation av $f(x)$ nära $x = a$, så måste vi öka graden av approximationen, dvs öka graden hos polynomet $P_n(x)$

En bild:



Kurvan $1 + x + \frac{x^2}{2}$ ligger närmare kurvan e^x än kurvan $1 + x$.

Vi säger att

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ approximerar bättre } e^x \text{ än } 1 + x$$

3. Approximation av grad n eller att approximera en funktion med ett polynom av grad n

Allmänt kan vi approximera funktionen $f(x)$ nära $x = a$ med ett polynom $P_n(x)$ av grad n.

där $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ och konstanterna $a_k, k = 0,1,2,3,...,n$ skall bestämmas sådana att

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), k = 0,1,2,...,n$$

under villkoren att funktionen $f(x)$ nära $x = a$ är tillräckligt "snäll"

Vi gör följande definition:

Polynomet:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

kallas Taylorpolynomet av grad n nära $x = a$ till $f(x)$. (Då $a = 0$ även MacLaurinpolynomet).

Taylors formel

Låt $f^{(k)}(x), k = 0,1,2,3,..., n+1$ vara kontinuerliga i ett intervall (x_1, x_2) som innehåller punkten a.

Då gäller, för varje $a \in (x_1, x_2)$ att

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

där $P_n(x)$ är Taylorpolynomet till $f(x)$, och

$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ är restermen eller felet som man gör när man ersätter funktionen $f(x)$ med Taylorpolynomet av grad n nära $x = a$

Olika sätt att skriva **restermen**

På Lagranges formen $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad a \le c \le x$

Att skriva resttermen på ORDO-form.

I restermen på Lagranges form sätt

$$\max_{a \le c \le x} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| = M \text{ , då blir } |r_n(x)| \le M|x-a|^{n+1} \quad (*)$$

Olikheten $(*)$ tecknas $r_n(x) = O(x-a)^{n+1}, x \to a$

Man säger att man har skrivit resttermen $r_n(x)$ ORDO-form

Några kända Mac Laurinutvecklingar (skall kunnas ordentligt)

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right), x \to 0$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \left(-1\right)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right), x \to 0$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \left(-1\right)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right), x \to 0$

4. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + \left(-1\right)^n x^n + O\left(x^{n+1}\right), x \to 0$

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \left(-1\right)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + O\left(x^{n+1}2\right), x \to 0$

6. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \left(-1\right)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + O\left(x^{2n+3}\right), x \to 0$

7. $\left(1+x\right)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + O\left(x^{n+1}\right), x \to 0$