Förel 20: Serier

Ibland behöver vi räkna ut summan av oändligt många tal

EX 1 $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{(2)^2} + \frac{1}{(3)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots\cdots$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots\cdots$$

Dessa summor kallas för serier och de tal som summeras kallas för seriens termer

Def En serie består av två begrepp

1. En talföljd $(a_k)_{k=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$

2. En tal följd $(S_n)_{n=}^{\infty}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

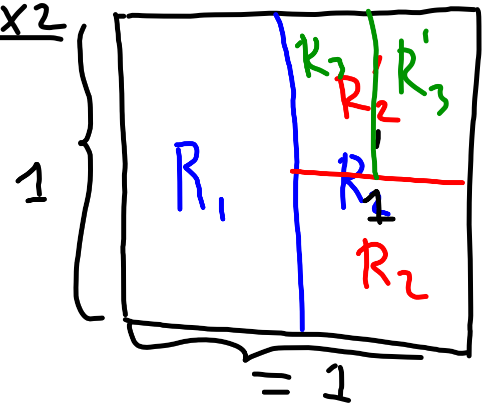
TALEN a_k kallas serienstermer

och talen S_n kallas den n:te partialsumma.

Serien ser ut så här

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots\cdots \\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{cases}$$

Ex2



R: kvadrat med sida = 1

① R delas i två lika rektanglar R_1, R_1'

② R_1' delas i två lika rektanglar R_2, R_2'

③ R_2' delas i två lika rektanglar R_3, R_3'

Vi får en följd av rektanglar:

$R_1, R_2, R_3, R_4, \ldots, R_n, R_{n+1}, \ldots\ldots$

med area

$$a_1 = 1/2,\ a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots\ a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

EX3

$t = n$ partikel befinner sig i a_n

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

om $a_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots \dots + 1 + \dots = \infty$$

Om $a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{(2)^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots = ?$$

Def Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ säges vara konvergent om $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ finns

annar säges att serien är divergent

Obs! Konvergensen kräver

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n+m} \quad \text{(för varje fixt } m\text{)}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n+m}) = 0$$

om $\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n+m}) \neq 0 \Longleftrightarrow$

Serien divergerar!!!

EX4 Beräkn $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Lösning

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left[\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right)}_{k=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}_{k=3}$$

$$+ \dots \underbrace{\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)}_{k=n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

SVAR $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

Ex5 Geometriska serier (ATT kunna väl)

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r|<1 \\ \infty, & |r| \geq 1 \end{cases}$$

I Ex2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

Vänstra led

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 1 - 1 = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\text{Här } r=\frac{1}{2}<1} - 1$$

$$= \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$= 2 - 1 = 1$$

#

Ex6 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}}$

$= S_1 + S_2$

Vi skall använda

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1+r+r^2+\dots+r^n+r^{n+1}+\dots = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r|<1 \\ \infty, & \text{annars} \end{cases}$$

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{3}}{3^{n+\cancel{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{0+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2+1} + \dots$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{med } r=\frac{1}{3}<1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3-1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Delsvar $\displaystyle S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} = \frac{1}{2}$

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} = \left[\frac{2^n}{3^{n+2}} = \frac{2^n}{3^2 3^n} = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right.$$

här $r = \frac{2}{3} < 1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{9} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{med } r = 2/3 < 1}$$

Fås $\frac{1}{1-r} =$

$= \frac{1}{1-2/3} = \frac{1}{\frac{3-2}{3}} = \frac{1}{1/3} = 3$

$$= \frac{1}{9} 3 = \frac{1}{3}$$

Delsvar $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} = 1/3$

Svar $S = S_1 + S_2 = 1/2 + 1/3 = 5/6$

$\underline{\text{EX7}}$ Undersök om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ är konvergent

$\underline{\text{Lösning}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{N\to\infty} S_N$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} = \underbrace{1}_{\geq \frac{1}{\sqrt{N}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\geq \frac{1}{\sqrt{N}}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} \geq N \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$$

$$N \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}$$

$\underline{\text{SVAR}}$ Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ är $\underline{\underline{\text{divergent}}}$

Divergens TEST fö $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

om $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar

Divergens TEST säger $\boxed{\text{inte}}$

om $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverg

Ty motex $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ Divergera

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ inte konvergerar

Motivering

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})$$

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Serien Diverserar

Divergens TEST säger också

Om $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är konvergent A

så måste $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ B

$A \Rightarrow B \Leftrightarrow$

icke $A \Leftarrow$ icke B

Ex8 Undersök om $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ är konv.

Här $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

$$a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

Sen är Divergent!!

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \underset{n=0}{1} - \underset{n=1}{1} + \underset{k=2}{1} - \underset{n=3}{1} + \underset{k=4}{1} - \underset{n=5}{1} + \ldots$$

$$= \begin{cases} 0, & n = \text{udda} \\ 1, & n \text{ jämn} \end{cases}$$

$$S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \therefore \text{gränsvärdet finns inte}$$

Motivering för

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r|<1 \\ \infty, & \text{annars} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1+r+r^2+\dots$$

För $r \neq 1$

$$S_n = 1+r+r^2+\dots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1-\lim_{n\to\infty} r^{n+1}}{1-r}$$

Undersök $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = r \lim_{n\to\infty} r^n$

$$= \begin{cases} 0, & |r|<1 \\ \infty, & |r|>1 \end{cases}$$

$r=1$

$$S_n = \underbrace{1+1^2+1^3+\dots+1^n}_{(n+1) \text{ st. } 1} = (n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$