Förel. 19 . Tillämpning av generaliserade Integraler
. Medelvärdessatsen för integraler

EXA. En behållare full med vätska har formen av en rotationskropp som uppstår då området

$$\left\{ (x,y),\ y = \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+3)}},\ 0 \le x < \infty \right\}$$

roterar ett varv runt x-axeln.
I den nedersta delen finns en kran som släpper ut vätskan med 1. v.e/s
Hur mycket tid krävs för att tömma ut behållaren?

Lösning Vi söker volymen av behållaren

$$V = \pi \int_0^\infty y^2(x)\,dx = \pi \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx$$

$$= \pi \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx = \pi \lim_{b\to\infty} I(b)$$

$$I(b) = \int_0^b \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx = \int_0^b \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}\right)dx$$

Identifiering

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

Vi får

$$\begin{aligned} 1 &= A(x+3)+B(x+1) \\ &= (A+B)x + 3A+B \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 = 3A+B \\ 0 = A+B \Rightarrow A=-B \end{cases}$$

$$\Longrightarrow A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x+3}$$

$$I(b) = \int_0^b \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^b \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^b \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x+3)\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ln(x+1) - \ln(x+3)\Big]_0^b \quad (!!!)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\right]_0^b \quad (\text{bättre}!!)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b+1}{b+3}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{0+1}{0+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b+1}{b+3}\right) - \frac{1}{2}\underbrace{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}_{(\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 3)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b+1}{b+3}\right) + \frac{1}{2}\ln 3$$

2) Tag nu $\lim_{b\to\infty} I(b)$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{b+1}{b+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln\left[\lim_{b\to\infty}\frac{b+1}{b+3}\right]$$

$$\left[\lim_{b\to\infty}\frac{b+1}{b+3} = \lim_{b\to\infty}\frac{\cancel{b}\left(1+\frac{1}{b}\right)}{\cancel{b}\left(1+\frac{3}{b}\right)} = 1\right]$$

$$\therefore \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{b+1}{b+3}\right) = \tfrac{1}{2}\ln(1) = 0$$

$\therefore \lim_{b\to\infty} I(b) = \frac{1}{2}\ln 3$

Volymen $\pi \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 3$

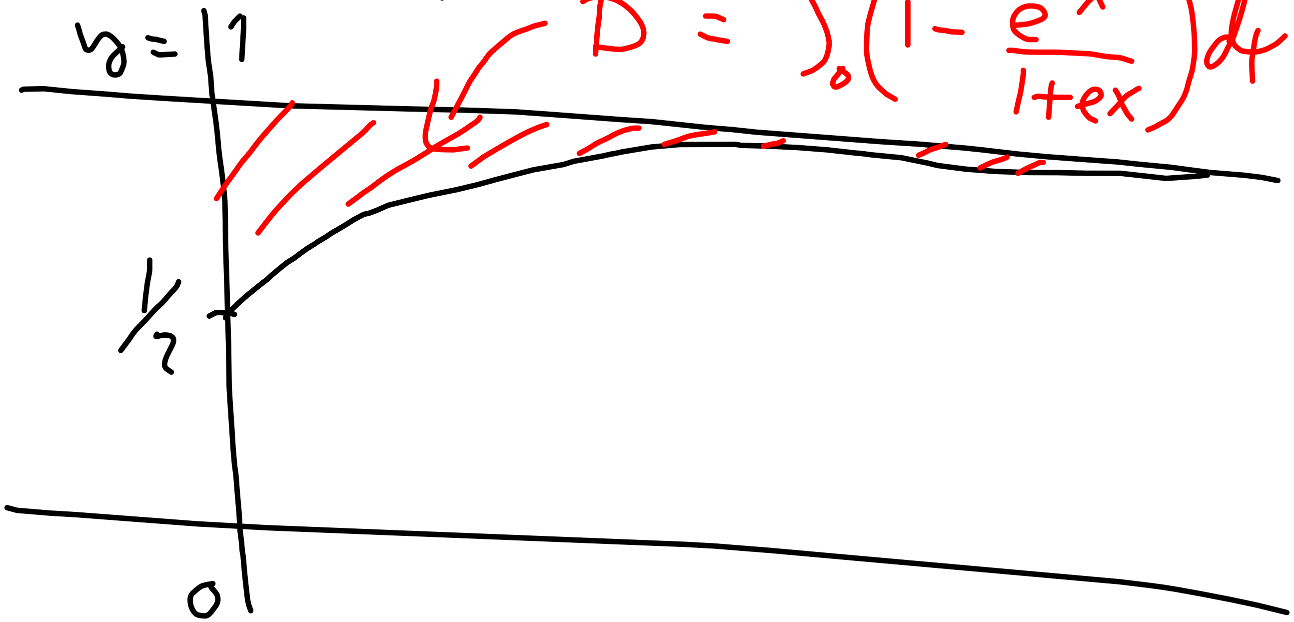
<u>SVAR</u> Vi tömmer ut behållaren efter $\frac{\pi}{2}\ln 3$ sek

EX B Hur mycket färg behövs för att måla området D som begränsas av $y = \frac{e^x}{1+e^x}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x}$, $x \geq 0$

Lösning

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$$

$$D = \int_0^\infty \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx$$



$$A(D) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx$$

$$\int_0^b \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = \int_0^b \left(\frac{1+e^x - e^x}{1+e^x}\right) dx$$

$$= \int_0^b \frac{1}{1+e^x}\, dx = \left[\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{e^x}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right]$$

$$= \int_0^b \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+e^{-x} \\ dt = -(e^{-x})\,dx \end{array} \right]$$

$x: 0 \longrightarrow b$

$t: 2 \longrightarrow 1+e^{-b}$

$$= \int_2^{1+e^{-b}} \frac{-dt}{t} = -\Big[\ln t\Big]_2^{1+e^{-b}} =$$

$$= -\ln(1+e^{-b}) + \ln 2$$

$$\therefore \lim_{b\to\infty} \int_0^b \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = \ln 2 - \underbrace{\lim_{b\to\infty} \ln\left(1+e^{-b}\right)}_{\ln(1)=0}$$

SVAR AREAN ATT MÅLA ÄR $\ln 2$

Integralkalkylens medelvärdessatsen

Rep Medelvärdesatsen för derivatan

om 1. $f(x)$ är kontinuerlig $a \le x \le b$

2. $f'(x)$ finns $a < x < b$

så är $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c), \quad a < c < b$

$(f'(b) - f'(a) = (b-a) f''(c_1), \quad a < c_1 < b$

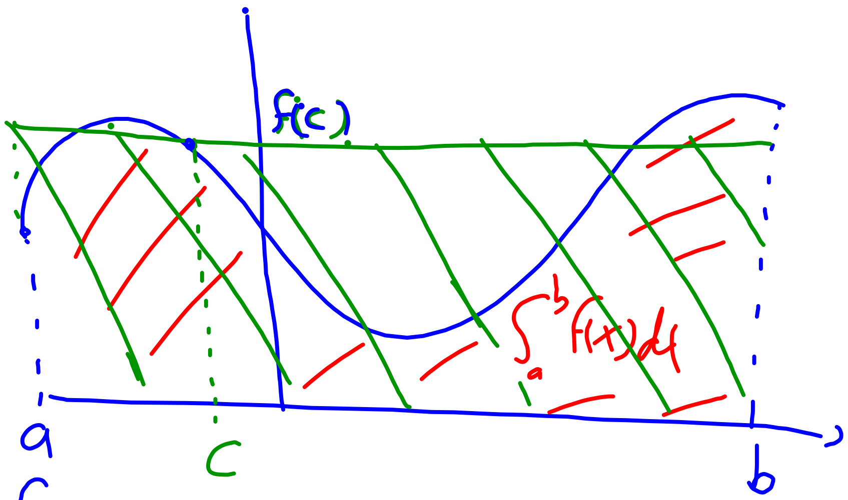
$f''(b) - f''(a) = (b-a) f^{(3)}(c_2), \quad a < c_2 < b$

Om f är kontinuerlig $a \le x \le b$

så finns ett tal c: $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c)$$

Geometrisk tolkning $f(x) \geq 0, \ a \leq x \leq b$



Om $f(x) \geq 0, \ a \leq x \leq b$ säger satsen att vi kan finn $c: a < c < b$ så Rektangel med basen $(b-a)$ och höjden $f(c)$ har arean $\int_a^b f(x)dx$

Motivering för

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\underbrace{\left[F(x)\right]_a^b}_{F(b)-F(a)}} = (b-a)\, f(c), \quad a < c < b$$

$$F(b) - F(a) = (b-a)\, f(c)$$

Def uttrycket $\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx = \bar{f}_{[a,b]}$

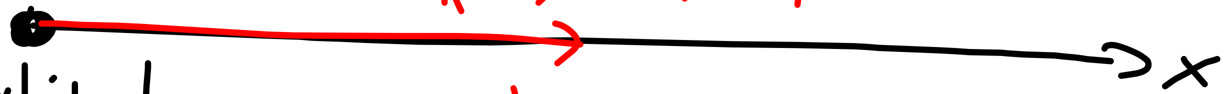
= medelvärdet för f på $[a,b]$

EX Finn medelvärde av $f(x)=x^2$ på $[1,3]$

Vi söker $\frac{1}{(3-1)}\int_1^3 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{13}{3}$

Ex

f(x) : kraft



partikel

$$\frac{1}{(b-a)} \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{arbete under sträckan } (b-a)}$$

Uppskattning av integraler

Om $m \leq f(x) \leq M$, $a \leq x \leq b$

och $\int_a^b f(x)\,dx$ finns

$$\Longrightarrow \quad m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Motivering: Vet $m \leq f(x) \leq M$, $a \leq x \leq b$

Integration ger att

$$\underbrace{\int_a^b m\,dx}_{(b-a)m} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \underbrace{\int_a^b M\,dx}_{M(b-a)}$$

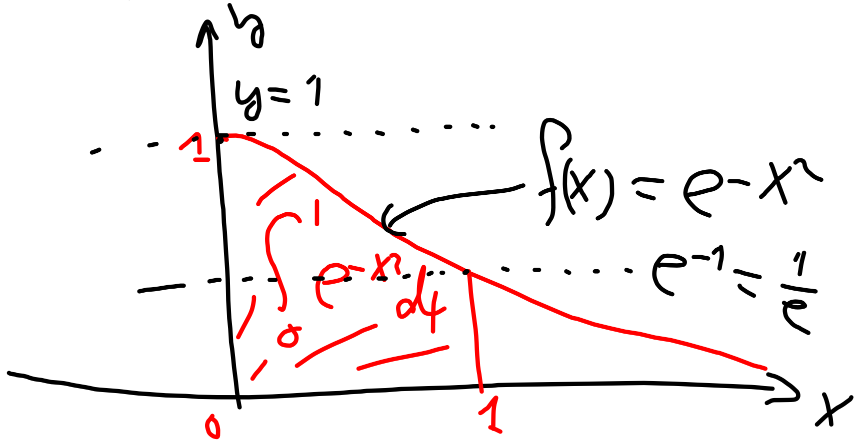
$$\Longrightarrow \quad m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

EXC

Undersök om

$$\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dt \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Lösning Kolla via en bild



$$\frac{1}{e} \leq e^{-x^2} \leq 1$$

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{e}\,dt}_{1/e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dt \leq \underbrace{\int_0^1 1\,dt}_{=1}$$

<u>EXD</u> om $\int_a^b f(x)\,dt$ finns på $[a,b]$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dt$$

om $|\beta| \leq \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leq \beta \leq \alpha$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Integrera mellan a och b

$$\underbrace{-\int_a^b |f(x)|\,dt}_{-\alpha} \leq \underbrace{\int_a^b f(x)\,dt}_{\beta} \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)|\,dt}_{\alpha}$$

$$\Longleftrightarrow \quad |\beta| \leq \alpha$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dt$$

Title: feb 20-13:56 (12 of 12)