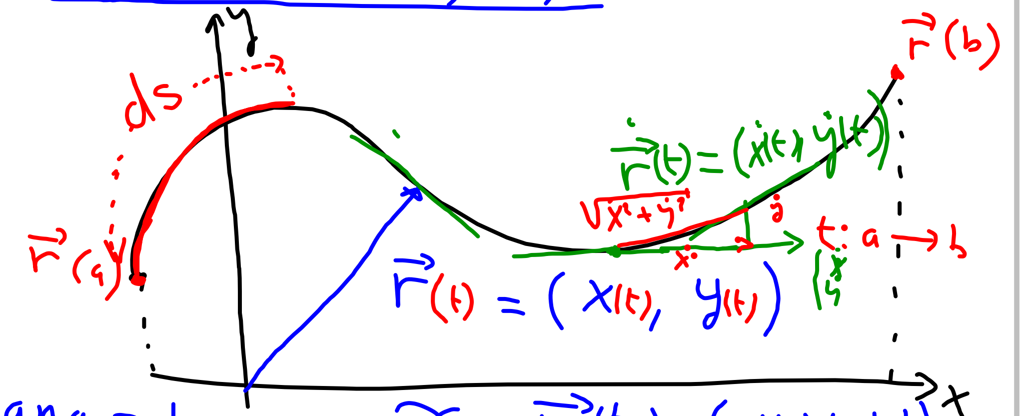
Förel 16: . Plana kurvors båglängd

. Generaliserade Integraler

. Plana kurvors båglängd



Bana = kurva = γ : $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t: a \to b$

① $\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (\dot{x}, \dot{y})$

= hastighetsvektor

② $\|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v(t)$ = farten

③ $ds(t) = v(t)\,dt \iff \frac{ds}{dt} = v(t) \iff \dot{s}(t) = v(t)$

④ Längden av kurvan γ ges då av $L = \int_a^b ds(t) = \int_a^b v(t)\,dt =$

$$= \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

Ex 1 $\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t + t\sin t \\ y(t) = \sin t - t\cos t \end{cases}$ $t : 0 \to 2\pi$

Finn båglängden till kurvan γ

Lösning Vet att $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t$$

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t$$

$$\therefore \dot{x} = t\cos t \Rightarrow \dot{x}^2 = t^2\cos^2 t$$

$$\dot{y} = t\sin t \Rightarrow \dot{y}^2 = t^2\sin^2 t$$

$$\Longrightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = t^2 \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} = t^2$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2}\, dt$$

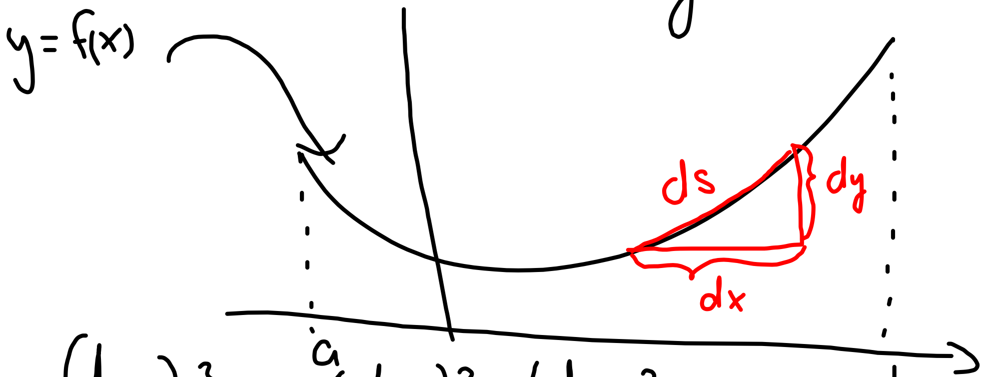
$$= \left[\sqrt{t^2} = |t| = \begin{cases} t, & t > 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases} \right]$$

$$= \int_0^{2\pi} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2$$

Svar $L = 2\pi^2$ l.e

Title: feb 14-09:27 (2 of 11)

Bågländen av kurvan $y=f(x)$, $a\le x\le b$



$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx)^2\left(1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right)$$

$$= \left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)(dx)^2$$

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$L = \int_a^b ds(x) = \int_a^b \sqrt{1+\Big(\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)}\Big)^2}\,dx$$

Längden av kurvan $y=f(x)$, $a\le x\le b$ ges då av $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Alternativt

Vet att om $\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t: t_1 \to t_2$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

Nu $\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \iff y = f(x)$

$\dot{x} = 1$, $\dot{y} = f'(t)$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

$\left(\begin{array}{l} t: a \to b \\ \text{Sätt } t_1 = a \\ \quad\; t_2 = b \end{array} \right)$

EX 2 En myra rör sig med 1 l.e/s på banan γ : $f(x) = \int_1^x \sqrt{4t^2-1}\,dt$, $1 \le x \le 2$

Hur mycket tid behöver myran för att gå över hela banan.

Lösning Vi söker längden av kurvan $y = f(x)$, $1 \le x \le 2$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

VET att grundssatsen för primitiva funktioner

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \le x \le b \qquad \frac{dF}{dx} = f(x), \quad a \le x \le b}$$

i vårt fall $f(x) = \int_1^x \sqrt{4t^2-1}\,dt$

$$f'(x) = \sqrt{4x^2-1}$$

$$\Rightarrow (f'(x))^2 = 4x^2-1$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+4x^2-1}\,dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{4x^2}\,dx = \int_1^2 2x\,dx$$

$$= \left[x^2\right]_1^2 = 4-1 = 3 \text{ l.e}$$

Svar Myran behöver 3 sek

Title: feb 14-09:47 (5 of 11)

Om generaliserade integraler

VET om f kontinuerlig på $[a, b]$

Så har f en primitiv funktion F

: $F'(x) = f(x) \quad a \leq x \leq b$

där $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leq x \leq b$

Hur gör man om

(1) Intervallet $[a, b]$ är obegränsat
f kontinuerlig

(2) Intervallet $[a, b]$ är ändligt
men f Ej kontinuerlig

Def Integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ sägs

vara generaliserade om

(Intervallet (a,b) obegränsat eller
" " begränsat men
f Ej kontinuerlig i Intervallet)

EX på generaliserade fkner

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Def 2 $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$

$$= \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

där $F'(x) = f(x)$, $a \le x < \infty$

Def 2 om $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx =$ ETT TAL

A så säges att

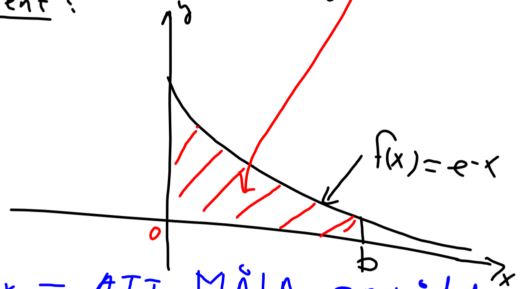
Integralen $\int_a^\infty f(x)dx$ är konvergent

med värdet $\int_a^\infty f(x)dx = A$

(Annars divergent)

BRA EX Undersök om $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ är konvergent?

Lösning



$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ = ATT MÅLA området som begränsas av kurvan $y = e^{-x}$ och positiva x-axeln.

= ATT kunna MÅLA området $\{(x,y) : 0 \le x < \infty,\ 0 \le y \le e^{-x}\}$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} I(b)$$

$$I(b) = \int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b} - (-\underbrace{e^{0}}_{=1}) = -e^{-b} + 1 = 1 - e^{-b}$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} I(b) = \lim_{b\to\infty}\left(1 - e^{-b}\right) = 1 - 0 = 1$$

Svar $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ $\therefore$ Konvergent

Ex

$$\int_0^\infty \cos x \, dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \cos x \, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \Big[\sin x \Big]_0^b = \lim_{b \to \infty} \big(\sin b - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \big)$$

$$= \lim_{b \to \infty} \sin b \quad \text{finns inte } (\pm 1)$$

$\int_0^\infty \cos x \, dx$ är inte konvergent

EX ATT kunna

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1 \\ \infty & \text{om } \alpha\le 1 \end{cases}$$

Lösning

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty} I(b)$$

$\alpha\neq 1$

$$I(b) = \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \int_1^b x^{-\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^b$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - 1\right) = \left[\right.$$

$$= \left[\lim_{b\to\infty} b^{1-\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{om } 1-\alpha>0,\ 1>\alpha \\ & \alpha<1 \\ 0 & \text{om } 1-\alpha<0 \Rightarrow \\ & 1<\alpha \Leftrightarrow \\ & \alpha>1 \end{cases}\right.$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(0-1) & \text{om } \alpha>1 \\ \infty & \text{om } \alpha<1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{om } \alpha>1 \\ \infty & \text{om } \alpha<1 \end{cases}$$

Fallet då $\alpha=1$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\ln b - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\right)$$

$$= \infty$$