Förel. nr 12 Om integraler

1. Defintion
2. Integralkalkylens Huvudssats
   Insättningsformeln $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$
3. Hur finner primitiva funktioner!

---

1. Definition av $\int_a^b f(x)\,dx$

Def 1 F säges vara en primitiv fkn till f på (a,b) om

$$F'(x) = f(x) \qquad a < x < b$$

Mängden av alla primitiva funktioner tecknas

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x) + C}_{\text{funktion}} \text{ (konstant)}$$

uttrycket $\int f(x)dx$ kallas för den obestämda Integralen

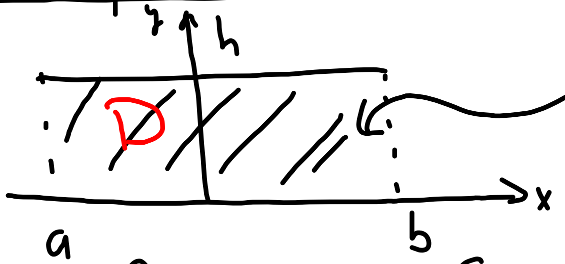
Def 2 $\int_a^b f(x)dx = \text{TAL}$, kallas för den bestämda integralen

Problem 1

Vad menas (utan primitiva fkner) med TALET $= \int_a^b f(x)\,dx$?

Areans problem

a)



$f(x) = h, \quad a \le x \le b$

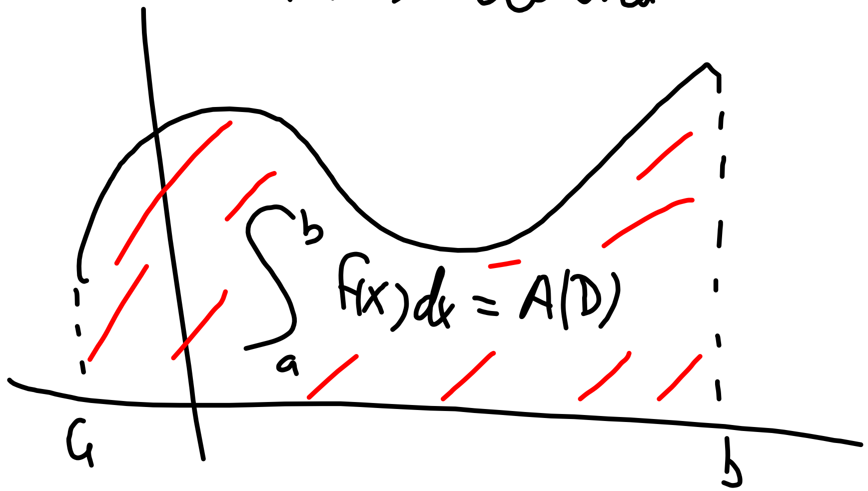
$A(D) =$ arean av D $= h(b-a) = \int_a^b h\,dx$

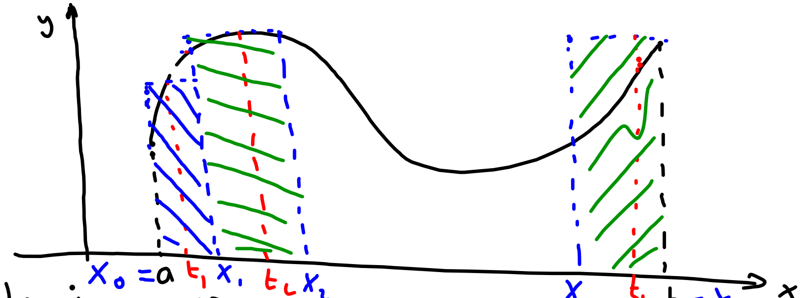
b) Låt $f(x) \ge 0$, $f \in C([a,b])$

$D = \{(x,y) : a \le x \le b, \; 0 \le y \le f(x)\}$

Sätt $A(D) = \int_a^b f(x)\,dx$

Hur räknas denna





Dela in $[a,b] = [a, x_1, x_2, \ldots \, x_{n-1}, b]$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

$\Delta x_k = x_{k-1} \leq x \leq x_k = [x_{k-1}, x_k]$

$\delta_n = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ = längsta del intervall bland $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$

Bilda Riemanns medelsumman:

$$R_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k = f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \ldots + f(t_n)\Delta x_n$$

då $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$

Om $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f)$ finns då $\delta_n \to 0$ och är lika med ett TAL så säges att f är Riemanns Integrabel (integrerbar) på $a \leq x \leq b$ och tecknas

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

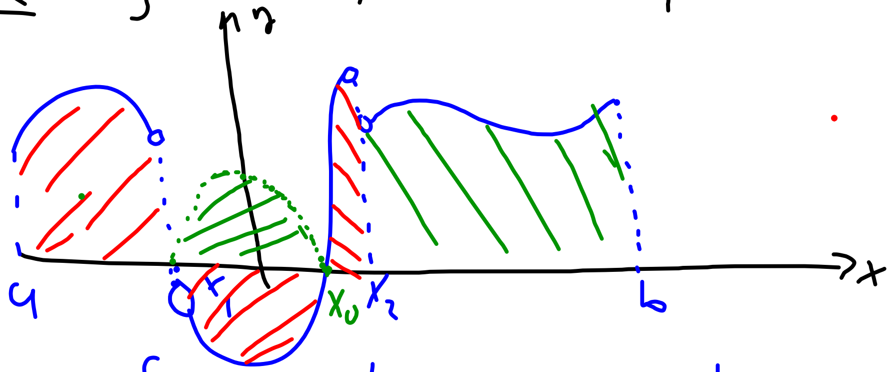
då $\delta_n \to 0$

problem 2   När Existerar $\int_a^b f(x)\,dx$

dvs när gäller att

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

SVAR f är styckvis kont. på $a \le x \le b$



f ej kontinuerlig i x_1 och x_2

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx$$

Arean ges av

$$\underbrace{\int_a^b |f(x)|\,dx}_{\text{Arean av området}} = \int_a^{x_1} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx$$

Hur beräknas på "enkelt sätt"

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \ ? \qquad f \text{ def } \quad a \le x \le b$$

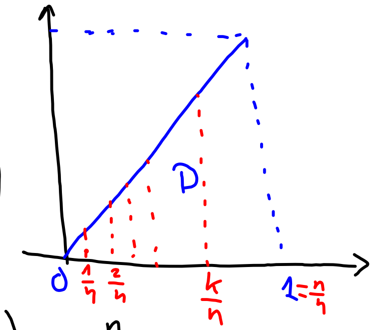
<u>Svar</u> $\quad t_k = x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$

$$\Delta x_n = x_k - x_{k-1} = \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

<u>EX</u> $\quad f(x) = x \qquad a = 0,\ b = 1$

$A(D) = \frac{1}{2}$



$R_n(f) =$

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= [a = 0,\ b = 1] =$$

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{(1-0)}{n}\right)\left(\frac{1-0}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \left[\begin{array}{l} f(x) = x \\ f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= \frac{1}{n^2}\Big(\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots n}_{\frac{n(n+1)}{2}}\Big) = \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2} \longrightarrow \frac{1}{2},\ n \to \infty$$

ATT beräkna $\int_a^b f(x)\,dx$

med primitiva fkner.

Insättningsformeln $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$

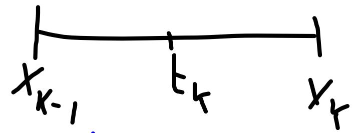
Motivering

$$\int_a^b F'(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

steg 1 Dela int $[a,b]$ i n-delintervaller

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots \; x_{n-1} < x_n = b$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$



steg 2 skriv om $F(b) - F(a)$

$$F(b) - F(a) = F(\overset{b}{x_n}) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_{n-2}) + \dots + F(x_1) + F(x_1) - F(\overset{a}{x_0})$$

$$= \left[\text{MVS} \quad g(\beta) - g(\alpha) = g'(t)(\beta - \alpha),\ \alpha < t < \beta \right]$$

$$= F'(t_n)\Delta x_n + F'(t_{n-1})\Delta x_{n-1} + \dots + F'(t_1)\Delta x_1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F'(t_k)\Delta x_k \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b F'(x)\,dx$$

TABELL om primitiva funktioner

$$\frac{d}{dt} f(u(x)) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \quad \text{(KEDJEREGELN)}$$

$$\frac{d}{dt} \ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{(log. derivering)}$$

$f(x)$	$\int f(x)\,dt$	$f(x)$	$\int f(x)\,dt$
0	konstant	x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
e^x	$e^x + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$, $a \neq 0$	$\ln\left\|x + \sqrt{a+x^2}\right\| + C$

Recept att finna primitiva fkner

A. Substitutionen: menas att man gör ett variabelbyte så att integranden har en känd primitiv funktion (kräver stor uppfinningsförmåga)

EX1 $\int x\sqrt{x-1}\,dt =$ [vi använder differitialen

$\frac{df}{dt} = f'(x) \iff \underbrace{df}_{\text{differentialen till } f} = f'(x)\,dt$]

$= \Big[t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x-1 \Rightarrow x = t^2+1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2+1) = 2t \Rightarrow \boxed{dx = 2t\,dt} \Big]$

$= \int (t^2+1)\cdot \underbrace{t\cdot 2t}_{2t^2}\,dt = \int (2t^4+2t^2)\,dt$

$= 2\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} + C$

$= 2t^2\left(\frac{t^3}{5} + \frac{t}{3}\right) + C =$ [ska ges som f(x)]

$= 2(x-1)\left(\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{5} + \frac{\sqrt{x-1}}{3}\right) + C$

$= 2(x-1)\sqrt{x-1}\left(\frac{x-1}{5} + \frac{1}{3}\right) + C$

$= 2(x-1)\sqrt{x-1}\left(\underbrace{\frac{x\cdot 3}{5\cdot 3}}_{\frac{3x}{15}} - \frac{1\cdot 3}{5\cdot 3} + \frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}\right) + C$

$\frac{3x}{15} + \frac{2}{15}$

SVAR $\int x\sqrt{x-1}\,dt = \frac{2}{15}(x-1)\sqrt{x-1}\,(3x+2) + C$

Title: feb 7-10:50 (8 of 8)