Föreln: 11 Rep $y'' + ay' + by = f(x)$

$a, b$ konstanter.

Allm. Lösning : $y = y_h + y_p$

där $y_h'' + a y_h' + b y_h = 0$

Som löses via (KE) $r^2 + ar + b = 0$

$y_p$ en partikulär lösning

$$y_p'' + a y_p' + b y_p = f(x)$$

Fall 1 : $f(x) =$ polynom av grad $n$

Fall 2 : $f(x) =$ polynom av grad $n$ $e^{kx}$

Fall 2 : $f(x) = (\text{polynom av grad } n) e^{kx} \begin{cases} \sin ax \\ \cos ax \end{cases}$

Ansats

| | |
|---|---|
| om $k + ai$ är en rot till (KE) = Resonans | $y_p(x) = x\, e^{kx}$(polynom av grad $n \cdot \sin ax$ + annan polynom av grad $n$ $\cos ax$) |
| om $k + ai$ är inte rot till KE | $y_p(x) =$ som ovan men utan multiplikation med $x$ |

EX1 $y''+y=\sin 2x$

Lösning ① $y=y_h+y_p$

där $y_h$ fås via (KE): $r^2+1=0$

$\Rightarrow r=\pm i$

$y_h(x)=A\cos x+B\sin x$

② Här $\alpha=0$, $a=2$

$\Rightarrow$ $0+2i$ ej rot till (KE)

$\Rightarrow$ HL $=\sin 2x$ Ej lösning till den homogena

$y_p(x)=\alpha\cos 2x+\beta\sin 2x$

$y_p'(x)=-2\alpha\sin 2x+2\beta\cos 2x$

$y_p''(x)=-4\alpha\cos 2x-4\beta\sin 2x$

in i $y_p''+y_p=\sin 2x$

$-4\alpha\cos 2x-4\beta\sin 2x+\alpha\cos 2x+\beta\sin 2x=\sin 2x$

$-3\alpha\cos 2x-3\beta\sin 2x=1\sin 2x+0$

$\Longrightarrow \begin{cases}-3\alpha=0\\ -3\beta=1\end{cases} \Rightarrow \beta=-1/3$

$\alpha=0$

$\Rightarrow y_p(x)=-\frac{1}{3}\sin 2x$

Svar $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=$

$=A\cos x+B\sin x-\frac{1}{3}\sin 2x$

Vad händer när tiden $x\longrightarrow\infty$

$|y(x)|=\left|A\cos x+B\sin x-\frac{1}{3}\sin 2x\right|$

$\leq|A\cos x|+|B\sin x|+\left|\frac{1}{3}\sin 2x\right|$

(enligt triangelolikhet)

$\leq |A|\underbrace{|\cos x|}_{\leq 1}+|B|\underbrace{|\sin x|}_{\leq 1}+\frac{1}{3}\underbrace{|\sin 2x|}_{\leq 1}$

$\leq \underbrace{\left(|A|+|B|+1/3\right)}_{\text{konstant}}$

$|y(x)|\leq$ konstant då $x\to\infty$

dvs $y(x)$ är begränsad

Ex2 $y'' + y = \cos x$

Lösning $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$= A\cos x + B\sin x + y_p(x)$

Här $k + ai = 0 + i = i$ en rot till (KE) $r^2 + 1 = 0 \iff HL = \cos x$ är en lösning till $y_h'' + y_h = 0$

Dvs vi ha resonans

Ansats: $y_p(x) = x(\alpha\cos x + \beta\sin x)$

$y_p' = \alpha\cos x + \beta\sin x + x(-\alpha\sin x + \beta\cos x)$

$y_p'' = -\alpha\sin x + \beta\cos x + (-\alpha\sin x + \beta\cos x) + x(-\alpha\cos x - \beta\sin x)$

$= -2\alpha\sin x + 2\beta\cos x - x(\alpha\cos x + \beta\sin x)$

In i $y_p'' + y_p = \cos x$, vi får

$-2\alpha\sin x + 2\beta\cos x - \cancel{x(\alpha\cos x + \beta\sin x)} + \cancel{x(\alpha\cos x + \beta\sin x)} = \cos x$

$\Longrightarrow \begin{cases} -2\alpha = 0 \\ 2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$

$y_p(x) = \frac{x}{2}\sin x$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$

Vad händer då $x \to \infty$

$|y(x)| = |A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}x\sin x|$

$\leq |A|\underbrace{|\cos x|}_{\leq 1} + |B|\underbrace{|\sin x|}_{\leq 1} + |\frac{1}{2}x|\underbrace{|\sin x|}_{\leq 1}$

$\leq (|A| + |B| + |\frac{x}{2}|) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

$\therefore |y(x)| \to \infty$ då $x \to \infty$

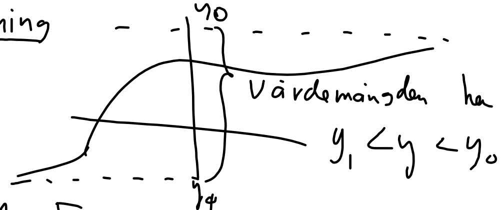
"Amplituds Resonans"

Title: feb 6-12:51 (3 of 5)

# BRA TAL OM EXTREMVÄRDEN

Bestäm värdemängden till banan
$f(x) = \sqrt{1-x} + \arcsin x$

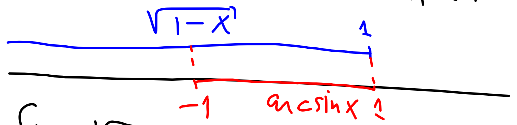
Lösning




Steg 1 Finn Definitionsmängden eller för vilka $x$ är $f(x) = \sqrt{1-x} + \arcsin x$

(a) $\sqrt{1-x}$ definierad om $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

(b) $\arcsin x$ —— " —— $-1 \leq x \leq 1$




$\therefore f(x) = \sqrt{1-x} + \arcsin x \quad -1 \leq x \leq 1$

$f(x)$ är kontinuerlig på det kompakta intervallet $-1 \leq x \leq 1 \Longrightarrow f$ har ett $\underbrace{\text{största}}_{M}$ och ett $\underbrace{\text{minsta}}_{m}$ värdet

Dvs vi har $m \leq \underbrace{\text{värdemängden}}_{f(x)=y} \leq M$

Dessa kan antas i följande punkter

(a) ändpunkter $-1$ och $+1$

dvs $f(-1) = \underbrace{\sqrt{1-(-1)}}_{\sqrt{2}} + \underbrace{\arcsin(-1)}_{-\pi/2}$

$f(-1) = \sqrt{2} - \pi/2$

$f(1) = \underbrace{\sqrt{1-1}}_{=0} + \underbrace{\arcsin(1)}_{\pi/2}$

Delsvar

$f(-1) = \sqrt{2} - \pi/2$

$f(1) = \pi/2$

(b) Stationära punkter dvs de punkter där $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{1-x} + \frac{d}{dx}\left(\arcsin x\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\frac{d}{dx}(1-x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \boxed{-1<x<1}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{1-x} \qquad (*)$$

Kvadrera

$$1-x^2 = 4(1-x) \Longrightarrow$$

$$\underbrace{1-x^2-4+4x}_{-x^2+4x-3} = 0 \Longrightarrow \underbrace{x^2-4x}_{(x-2)^2-2^2}+3 = 0$$

$$\Longrightarrow (x-2)^2-4+3 = 0$$

$$\Longrightarrow (x-2)^2 = 1 \Longrightarrow x-2 = \pm 1$$

$$\Longrightarrow x = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$ Dessa skall provas i $(*)$

$f'(x)$ saknar nollställen i $-1<x<1$

De punkter som kan ge största och minsta värde är $-1$ och $1$

dvs $f(-1) = \sqrt{2} - \pi/2$, $f(1) = \pi/2$

Svar $\sqrt{2}-\pi/2 \le f(x) \le \pi/2$