Forel nr 10 Differentialekv av grad 2 med konstanta koefficienter.

(Kolla lab 7 och 10)

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x) \qquad (1)$$

där a, b är konstanter.

Den allmänna lösningen till (1) ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

där $y_h(x)$ löser den homogena ekvationen

dvs $$y_h''(x) + a\,y_h'(x) + b\,y_h(x) = 0$$

medan $y_p(x)$ är en partikulär lösning till den inhomogena ekvationen dvs

$$y_p''(x) + a\,y_p'(x) + b\,y_p(x) = f(x)$$

__Problem 1__ __Hur löser man den homogena ekvationen__, dvs hur finner man $y_h(x)$.

$$y_h''(x) + a y_h'(x) + b y_h(x) = 0 \quad (H)$$

__Lösning__, Ansatt $y_h(x) = e^{rx}$, $r =$ konst.

$y_h'(x) = r e^{rx}$, $y_h''(x) = r^2 e^{rx}$

in i (H) $\Rightarrow r^2 e^{rx} + a r e^{rx} + b e^{rx} = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0}(r^2 + ar + b) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2 + ar + b = 0}$$

__Def 1__ $r^2 + ar + b = 0$ som fås via ansatsen $y_h(x) = e^{rx}$ i

$$y_h''(x) + a y_h'(x) + b y_h(x) = 0 \quad (H)$$

kallas för den karakteriska ekvationen (KE) till (H)

Def 2

$$\begin{cases} e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta \\ e^{-i\beta} = \cos\beta - i\sin\beta \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\beta = \frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2} \quad \text{reellt}$$

$$\sin\beta = \frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i} \quad \text{re}$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} =$$
$$= e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\right)$$

SATS Den homogena ekvationen

$$y_h''(x) + a y_h'(x) + b y_h(x) = 0$$

med (KE): $r^2 + ar + b = 0$

har följande $\boxed{\text{Reella}}$ lösningar som beror på rötterna r_1 och r_2 till (KE).

Fall 1: $r_1 \neq r_2$, r_1 och r_2 är reella

$$\Longrightarrow y_h(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

A, B konstanter

FALL 2 $r_1 = r_2 = r$ (Reellt)

$$\Longrightarrow y_h(x) = (Ax + B)e^{rx}$$

A, B är reella konstanter

Fall 3 $r_1 = \alpha + i\beta \Longrightarrow r_2 = \alpha - i\beta$ är också en rot till (KE) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow y_h(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right)$$

A, B, α, β är Reella.

EX1 Lös $y'' + y' - 6y = 0$

(KE): $r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow r = -3, 2$

lösningen blir

$$y_h(x) = A e^{-3x} + B e^{2x}$$

EX2 Lös $y'' + 2y' + y = 0$

(KE): $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r+1)^2 = 0$

$r_1 = r_2 = r = -1$

$$y_h(x) = (Ax + B) e^{-x}$$

EX3
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ y(0) = 3, \; y'(0) = 0 \end{cases}$$

(KE) $r^2-4r+13=0 \Rightarrow r = 2 \pm 3i$

Vi tar $r_1 = 2+3i = \alpha + \beta i$

$$y_h(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) = [\alpha=2, \beta=3]$$

$$= e^{2x}\left(A\cos(3x) + B\sin(3x)\right)$$

Finn A och B via $y_h(0)=3$, $y_h'(0)=0$

$$y_h'(x) = e^{2x}\left(\cos(3x)(2A+3B) + (2B-3A)\sin(3x)\right)$$

$$y_h'(0)=0 \iff \underbrace{e^0}_{=1}\left(\underbrace{\cos(0)}_{=1}(2A+3B) + (2B-3A)\underbrace{\sin(0)}_{=0}\right)$$

$$\Rightarrow 2A+3B = 0 \quad (1)$$

$$y_h(0)=3 \iff e^0\left[A\underbrace{\cos(0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(0)}_{=0}\right] = 3$$

$$\Rightarrow A = 3 \quad (2)$$

I (1) $\Rightarrow B = -\frac{2}{3}A = -\frac{2}{3}3 = -2$

Den lösning som löser

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ y(0)=3, \ y'(0)=0 \end{cases}$$

Ges av $y_h(x) = e^{2x}\left(3\cos 3x - 2\sin 3x\right)$

Recept ATT Finna en partikulär lösning y_p till $y_p''(x) + a y_p'(x) + b y_p(x) = f(x)$

FALL 1 $\quad f(x) = P_n(x)$ = ett polynom av grad n.

ANSATS

$b \neq 0$	$y_p(x) =$ polynom av grad n
$b = 0, a \neq 0$	$y_p(x) = x$ (polynom av grad n)
$\underbrace{a = b = 0}$	$y_p(x) = x^2$ (polynom av grad n)

$y''(x) =$ polynom av grad n

integrera 2ggr

EX4 Lös $y'' - 4y' + 5y = 15x + 8$ (4)

Lösningen: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Steg 1 Finn $y_h(x)$ som i EX1–3

Via (KE) $r^2 - 4r + 5 = 0$

$\Rightarrow (r-2)^2 = -1 \Rightarrow r = 2 \pm i = \alpha + i\beta$

$y_h(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

$= [\alpha = 2, \beta = 1] =$

$= e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$

Steg 2 Finn $y_p(x)$ dvs

(4.1) $y_p''(x) - 4y_p' + 5y_p(x) = 15x + 8$

Här HL $= f(x) = 15x + 8 =$ polynom av grad 1

$b = 5 \neq 0$

Ansatsen $y_p(x) = ax + b$

$y_p'(x) = a$, $y_p'' = 0$ in i (4.1)

$\underbrace{0 - 4a + 5(ax+b)}_{\text{måste vara polynom av grad 1}} = 15x + 8$

$\Rightarrow 5a\,x + 5b - 4a = 15\,x + 8$

$\Rightarrow \begin{cases} 5a = 15 \\ 5b - 4a = 8 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow a = 3 \\ \Rightarrow b = 4 \end{matrix}$

$y_p(x) = 3x + 4$

SVAR $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$= e^{2x}(A\cos x + B\sin x) + 3x + 4$

där A, B konstanter

Fall 2 $\quad f(x) = \begin{pmatrix} \text{polynom} \\ \text{av grad } n \end{pmatrix} e^{kx}$

Metod Förskjutningsregeln

substitution $y_p(x) = z_p(x) e^{kx}$

in $y_p''(x) + a y_p'(x) + b y_p(x) = P_n(x) e^{kx}$

övergår $z_p'' + A z_p' + B z_p = P_n(x)$

GOTO Fall 1

Ex5 Lös $y''-4y'+5y = xe^x$ (5)

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Steg 1 $y_h(x)$: $y_h''(x)-4y_h'(x)+5y=0$

Se Ex 4 $y_h(x) = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$

Steg 2 HL(5) $f(x) = xe^x = $ (polynom av grad 1) e^x

För att finna $y_p(x)$, vi substituera $\boxed{y_p(x) = z_p(x)e^x}$ i ekv (5)

dvs $y_p''(x) - 4y_p'(x) + 5y_p(x) = xe^x$ (5.1)

$y_p(x) = z_p(x)e^x$ (produktregeln)

$y_p'(x) = z_p'(x)e^x + e^x z_p(x)$

$= e^x(z_p'(x) + z_p(x))$

$y_p''(x) = e^x(z_p'(x)+z_p(x)) + e^x(z_p''(x)+z_p'(x))$

$= e^x(z_p''(x) + 2z_p'(x) + z_p(x))$

In i ekv(5.1)

$\cancel{e^x}(z_p''(x)+2z_p'(x)+z_p(x)) - 4\cancel{e^x}(z_p'(x)+z_p(x)) +$

$+ 5z_p(x)\cancel{e^x} = x\cancel{e^x}$

$\Longrightarrow z_p''(x) - 2z_p'(x) + 2z_p(x) = x$

Sök $z_p(x)$ på formen $ax+b$

$z_p'(x) = a$, $z_p'' = 0$

$0 - 2a + 2(ax+b) = x$

$\Longrightarrow 2ax + 2b - 2a = x$

$\Longrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 2a = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = b = 1/2$

$z_p(x) = \frac{1}{2}(x+1)$

Men $y_p(x) = z_p(x)e^x$ som söks

$= \frac{1}{2}(x+1)e^x$

SVAR Den allm. lösningen till

$y''(x) - 4y'(x) + 5y = xe^x$

ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x) =$

$= e^{2x}(A\cos x + B\sin x) + \frac{1}{2}(x+1)e^x$

Title: feb 2-10:33 (9 of 10)

EX6 Sök den allmänna lösningen till

$$y'' - 4y' + 5y = \underbrace{15x + 8}_{f_1(x)} + \underbrace{xe^x}_{f_2(x)}$$

SVAR $y(x) = y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$

där $y_h(x)$: $y_h''(x) - 4y_h'(x) + 5y_h(x) = 0$

Som löser vi (KE): $r^2 - 4r + 5 = 0$

$y_{p_1}(x)$ en partikulär lösning

$$y_{p_1}''(x) - 4y_{p_1}'(x) + 5y_{p_1}(x) = f_1(x) = 15x + 8$$

$y_{p_2}(x)$ en partikulär lösning

$$y_{p_2}''(x) - 4y_{p_2}'(x) + 5y_{p_2}(x) = f_2(x) = xe^x$$

SVAR

$$y(x) = e^{2x}(A\cos x + B\sin x) + \underbrace{3x + 4}_{y_{p_1}(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x+1)e^x}_{y_{p_2}(x)}$$